

# Optymalizacja topologii układów opisywanych nierównościami wariacyjnymi

Andrzej Myśliński

Instytut Badań Systemowych PAN, Warszawa,  
e-mail: [myslinsk@ibspan.waw.pl](mailto:myslinsk@ibspan.waw.pl)

Seminarium IEEE/PAN

"Analiza i sterowanie układami z czasoprzestrzenną dynamiką"

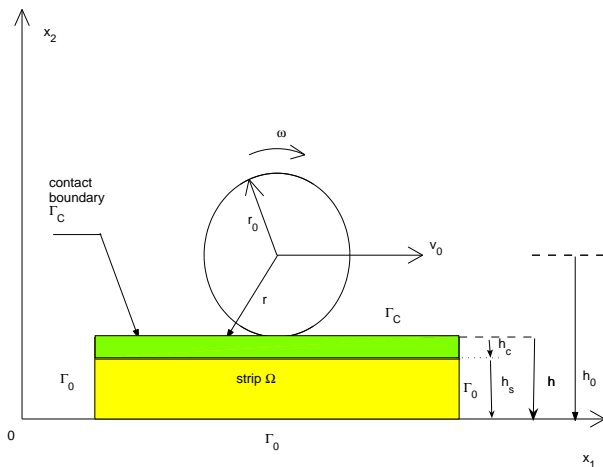
ISIS, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra,  
22 listopada 2010

- nierówności wariacyjne (hemiwariacyjne): zagadnienia brzegowe z nierównościowymi warunkami brzegowymi lub początkowymi
  - sprężyste zagadnienia kontaktowe: tarcie, przepływ ciepła, zmienne współczynniki tarcia, dynamika, lepkosprężystość
  - inne zastosowania techniczne: P & N, 1995
  - WK optymalności
  - inkluzje różniczkowe
- optymalizacja kształtu - wyznaczanie kształtu zewnętrznego brzegu obszaru
  - metoda pochodnej materialnej (pochodna kształtu)
- optymalizacja topologii - optymalny rozkład materiału ciała zapewniający jego optymalny kształt

- metoda homogenizacji
  - ① podejście numeryczne: metoda SIMP (funkcja kary)
  - ② SIMP została wykorzystana przez S & K (2009, 2010) do rozwiązania zadań optymalizacji topologicznej zagadnień kontaktowych bez tarcia
- metoda pochodnej topologicznej - wrażliwość rozwiązań zagadnień brzegowych i/lub funkcjonałów kształtu na pojawianie się otworów, materiałów o innej charakterystyce
  - metoda rozwinięć asymptotycznych
    - ① " matched and compound asymptotic expansion " N, P, S, M ... od 1990
    - ② techniki: SLP i DLP; tensor (macierz) polaryzacji; wykorzystanie równań całkowych A ...
    - ③ rozwinięcia w szereg Fouriera, (Bessela)
    - ④ rozwinięcia we współrzędnych biegunowych

- 1 Sformułowanie
  - ewolucyjne zagadnienie kontaktowe
  - zadanie optymalizacji topologii
- 2 analiza wrażliwości / pochodna topologiczna
- 3 warunek konieczny optymalności
- 4 podejście numeryczne
- 5 przykłady numeryczne
  - kontakt statyczny - optymalizacja topologii
  - kontakt toczy; materiał gradientowy - analiza naprężeń brzegowych

# Zagadnienie kontaktowe - 1



Rys. 1. Obszar początkowy  $\Omega$ .

## Zagadnienie kontaktowe - 2

- Obszar  $\Omega$  należy do zbioru obszarów takich że:

$$O_l = \{\Omega \subset R^2 : \Omega \text{ jest otwarty}, S \subset \Omega \subset D, \#\Omega^c \leq l\} \quad (1)$$

$D$  jest ograniczonym, gładkim podzbiorem  $R^2$

$\#\Omega^c$  - liczba spójnych składników uzupełnienia  $\Omega^c$  zbioru  $\Omega$  względem  $D$

$l$  jest zadaną liczbą naturalną

- $\Gamma$  brzeg obszaru  $\Omega$ , odpowiednio gładki
- siły masowe  $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ ,  $x \in \Omega$ ,
- siły brzegowe  $p(x) = (p_1(x), p_2(x))$ ,  $x \in \Gamma$ , działające na części  $\Gamma_1$  brzegu  $\Gamma$
- ciało jest sztywno zamocowane na części  $\Gamma_0$  brzegu  $\Gamma$ ,
- zjawisko kontaktu może wystąpić na brzegu  $\Gamma_2$ ,
- $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ ,  $\Gamma = \bar{\Gamma}_0 \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ .

# Zagadnienie kontaktowe - 3

- $u = (u_1, u_2)$ ,  $u = u(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  przemieszczenie
- $\sigma(\mathbf{x}) = \{\sigma_{ij}(u(t, \mathbf{x}))\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , naprężenie

Model materiału **Kelvina - Voigta**

$$\sigma_{ij}(u(t, \mathbf{x})) = c_{ijkl}^0(\mathbf{x})\mathbf{e}_{kl}(u) + c_{ijkl}^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_{kl}(\dot{u}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2)$$

$$i, j, k, l = 1, 2, u_{k,l} = \frac{\partial u_k}{\partial x_l}.$$

$c_{ijkl}^0(\mathbf{x})$  and  $c_{ijkl}^1(\mathbf{x})$ ,  $i, j, k, l = 1, 2$ , składowe tensora Hooke'a, spełniają warunki:

$$c_{ijkl}^\nu(\mathbf{x}) \in L^\infty(\Omega), \quad c_{ijkl}^\nu(\mathbf{x}) = c_{jikl}^\nu(\mathbf{x}) = c_{klij}^\nu(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\exists m_0^\nu > 0, M_0^\nu > 0, \quad m_0^\nu \xi_{ij} \xi_{kl} \leq c_{ijkl}^\nu(\mathbf{x}) \xi_{ij} \xi_{kl} \leq M_0^\nu \xi_{ij} \xi_{kl}, \quad (4)$$

dla wszystkich symetrycznych tensorów drugiego rzędu  $\xi_{ij}$  oraz wszystkich  $\mathbf{x} \in \Omega$  przy czym  $0 < m_0^\nu \leq M_0^\nu$ ,  $\nu = 0, 1$ .

Odształcenie  $e_{kl}(u(x))$ ,  $k, l = 1, 2$ , jest definiowane jako:

$$e_{kl}(u(x)) = \frac{1}{2}(u_{k,l}(x) + u_{l,k}(x)), \quad u_{k,l}(x) = \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l}. \quad (5)$$

Pole naprężeń  $\sigma$  spełnia ewolucyjne równanie stanu:

$$\ddot{u}_i - \sigma_{ij}(u(t, x))_{,j} = f_i(t, x) \quad \text{w } (0, T) \times \Omega, \quad i, j = 1, 2, \quad (6)$$

$$\sigma_{ij}(u(t, x))_{,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}(u(t, x))}{\partial x_j}, \quad \ddot{u}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2.$$

Warunki początkowe

$$u_i(0, x) = u_{0i}, \quad \dot{u}_i(0, x) = u_{1i}, \quad i = 1, 2, \quad \text{w } \Omega, \quad (7)$$

$u_{0i}, u_{1i}$  - zadane funkcje



Warunki brzegowe

$$\begin{aligned}u_i(x) &= 0 \quad \text{na } (0, \mathcal{T}) \times \Gamma_0, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}(u)n_j &= p_i \quad \text{na } (0, \mathcal{T}) \times \Gamma_1, \quad i, j = 2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{u}_N \leq 0, \quad \sigma_N \leq 0, \quad \dot{u}_N \sigma_N = 0, \quad \text{na } (0, \mathcal{T}) \times \Gamma_2, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}_T = 0 &\Rightarrow |\sigma_T| \leq \mathcal{F} |\sigma_N|, \\ \dot{u}_T \neq 0 &\Rightarrow \sigma_T = -\mathcal{F} |\sigma_N| \frac{\dot{u}_T}{|\dot{u}_T|} \quad \text{na } (0, \mathcal{T}) \times \Gamma_2, \end{aligned} \quad (10)$$

Niech:

$$\begin{aligned} f &\in H^{1/4}(I; (H^1(\Omega; R^2))^*) \cap L^2(I; (H^{1/2}(\Omega; R^2))^*), \\ p &\in L^2(I; (H^{-1/2}(\Gamma_1; R^2))), \quad u_0 \in H^{3/2}(\Omega; R^2), \\ u_1 &\in H^{3/2}(\Omega; R^2), \mathcal{F} \geq 0, \quad \mathcal{F} \in L^\infty(\Gamma_2; R^2), \\ &\mathcal{F}(\cdot, x) \text{ jest ciągła dla p.k. } x \in \Gamma_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Spełnione są warunki zgodności:  $u_{0i}|_{\Gamma_0 \cup \Gamma_2} = u_{1i}|_{\Gamma_0} = 0$ ,  $i = 1, 2$ ,

$$\begin{aligned} H_{sp} &= H^{1/2}(I; H^1(\Omega; R^2)), \\ F &= \{z \in H_{sp} : z_i = 0 \text{ na } (0, T) \times \Gamma_0, i = 1, 2\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$K = \{z \in F : \dot{z}_N \leq 0 \text{ na } (0, T) \times \Gamma_2\}, \quad (13)$$

## Sformułowanie wariacyjne - 2

Formy dwuliniowe:  $a^i(.,.) : F \times F \rightarrow R$ ,  $i = 0, 1$ , są zadane przez:

$$\begin{aligned}a^0(u, v) &= \int_Q c_{ijkl}^0 e_{ij}(u) e_{kl}(v) dx dt, \\a^1(u, v) &= \int_Q c_{ijkl}^1 e_{ij}(u) e_{kl}(v) dx dt.\end{aligned}\tag{14}$$

Wyznacz  $u \in K$ , takie że:

$$\begin{aligned}u &\in L^2(I; H^1(\Omega; R^2)) \cap H^{1/2}(I; H^1(\Omega; R^2)) \cap K, \\ \dot{u} &\in L^2(I; H^1(\Omega; R^2)) \cap H^{1/2}(I; L^2(\Omega; R^2)) \cap K, \text{ oraz} \\ \ddot{u} &\in L^2(I; H^{-1}(\Omega; R^2)) \cap (H^{1/2}(I; L^2(\Omega; R^2)))^*,\end{aligned}\tag{15}$$

spełniające warunki początkowe (7) oraz układ równań ewolucyjnych:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Q}} \ddot{u}(v - \dot{u}) dxdt + a^0(u, v - \dot{u}) + a^1(\dot{u}, v - \dot{u}) + \\ & \int_{\gamma_2} \mathcal{F} |\sigma_N| (|v_T| - |\dot{u}_T|) dsd\tau \quad (16) \\ & \geq \int_{\mathcal{Q}} f(v - \dot{u}) dxdt + \int_{\gamma_1} p(v - \dot{u}) dsd\tau \quad \forall v \in K. \end{aligned}$$

Istnienie rozwiązania zagadnienia wariacyjnego (16) zostało udowodnione przez J & E (2005)

## Theorem

*Jeśli:*

- (i) warunek (11) jest spełniony,*
  - (ii) brzeg  $\Gamma_2$  jest klasy  $C^{1,1}$ ,*
  - (iii) współczynnik tarcia jest dostatecznie mały,*
- wówczas istnieje rozwiązanie zagadnienia (16).*

Zagadnienie kontaktowe z zadaniem tarcia:

$$\mathcal{F} \mid \sigma_N \mid = \mid \sigma_T \mid \leq 1. \quad (17)$$

Warunek brzegowy (10) jest zastąpiony następującym,

$$\dot{u}_T \sigma_T + \mid \dot{u}_T \mid = 0, \mid \sigma_T \mid \leq 1 \quad \text{na } I \times \Gamma_2. \quad (18)$$

$$\Lambda = \{ \lambda \in L^2(I; L^\infty(\Gamma_2; \mathbb{R}^2)) : \mid \lambda \mid \leq 1 \quad \text{na } I \times \Gamma_2 \}. \quad (19)$$

System (16) przybiera postać: wyznacz  $u \in K$  oraz  $\lambda \in \Lambda$  takie, że:

$$\int_Q \ddot{u}(v - \dot{u}) dx dt + a^0(u, v - \dot{u}) + a^1(\dot{u}, v - \dot{u}) + \quad (20)$$

$$\int_{\gamma_2} \lambda_T \sigma_T (v - \dot{u}) dx d\tau \geq \int_Q f(v - \dot{u}) dx dt + \int_{\gamma_1} p(v - \dot{u}) dx d\tau \quad \forall v \in K,$$

$$\int_{\gamma_2} \sigma_T \dot{u}_T ds d\tau \leq \int_{\gamma_2} \lambda_T \dot{u}_T ds d\tau \quad \forall \lambda_T \in \Lambda. \quad (21)$$

## Funkcjonał kształtu

$$J_\phi(u(\Omega)) = \int_{\gamma_2} \sigma_N(u) \phi_N(x) ds d\tau, \quad (22)$$

Funkcjonał (22):

- aproksymuje naprężenie normalne na brzegu kontaktu
- zależy od rozwiązania  $u$  zagadnienia wariacyjnego (20) - (21) oraz od zadanej ograniczonej funkcji pomocniczej  $\phi \in M^{st}$ . Zbiór  $M^{st}$  jest zadany następująco:

$$M^{st} = \{ \phi \in L^\infty(I; H^1(D; \mathbb{R}^2)) : \phi_i \leq 0 \text{ na } I \times D, \\ i = 1, 2, \|\phi\|_{L^\infty(I; H^1(D; \mathbb{R}^2))} \leq 1 \}. \quad (23)$$

$$\|\phi\|_{H^1(D; \mathbb{R}^2)} = \left( \sum_{i=1}^2 \|\phi_i\|_{H^1(D)}^2 \right)^{1/2}.$$



## Zadanie optymalizacji - 2

Objętość (masa)  $Vol(\Omega)$  obszaru  $\Omega$ :

$$Vol(\Omega) = \int_{\Omega} dx. \quad (24)$$

Obszar  $\Omega$  spełnia ograniczenie:

$$Vol(\Omega) - Vol^{giv} \leq 0, \quad (25)$$

stała  $Vol^{giv} = const_0 > 0$  jest zadana.

Obwód (perimeter) brzegu obszaru  $\Omega$ :

$$P_D(\Omega) = \int_{\Gamma} ds. \quad (26)$$

$U_{ad}$  zbiór obszarów dopuszczalnych

$$U_{ad} = \{\Omega \in O_I : \Omega \text{ Lipschitzowsko ciągły,} \\ \Omega \text{ spełnia warunek (25), } P_D(\Omega) \leq \text{const}_1\}. \quad (27)$$

## Zadanie optymalizacji

dla zadanej funkcji  $\phi \in M^{st}$ , wyznacz obszar  $\Omega^* \in U_{ad}$  taki, że

$$J_\phi(u(\Omega^*)) = \min_{\Omega \in U_{ad}} J_\phi(u(\Omega)) \quad (28)$$

Z prac D & Z, B wynika istnienie obszaru optymalnego  $\Omega^* \in U_{ad}$ .

- celem optymalizacji topologii jest wyznaczenie optymalnego kształtu obszaru bez założeń a priori co do jego topologii
- $0 < \rho < R$ , mały parametr,  $R$  zadane.
- $B(x, \rho) = \{z \in R^2 : |x - z| < \rho\}$  mała dziura (wypełnienie) o promieniu  $\rho$  w punkcie wewnętrznym  $x \in \Omega$  ;
- jednorodny warunek brzegowy Neumanna jest zadany na brzegu  $\partial B$  dziury
- $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{B(x, \rho)}$

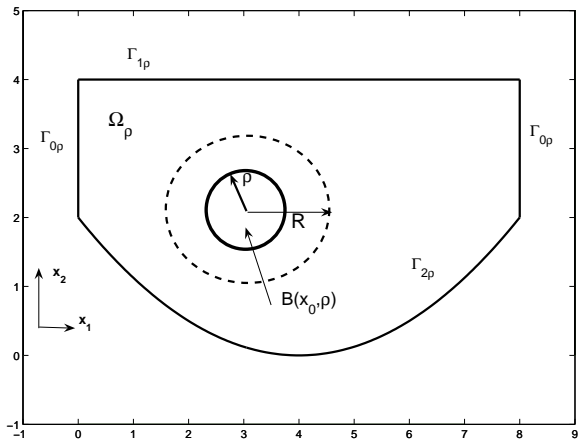


Fig. 2. Obszar zaburzony  $\Omega_\rho$ .

Pochodna topologiczna  $TJ_\phi(\Omega, \mathbf{x})$ :

$$TJ_\phi(\Omega, \mathbf{x}) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} [J_\phi(\Omega \setminus \overline{B(\mathbf{x}, \rho)}) - J_\phi(\Omega)] / \pi \rho^2. \quad (29)$$

- Pochodna topologiczna jest wyznaczana metodami asymptotycznych rozwinięć
- Aby wyznaczyć minimum funkcjonału  $J_\phi(\Omega)$ , w punktach gdzie pochodna  $TJ_\phi$  przyjmuje wartości ujemne należy usunąć materiał (wstawić dziury lub "słaby" materiał)

# Zagadnienie kontaktowe w $\Omega_\rho$ - 1

$H_\rho$  oraz  $K_\rho$  przestrzeń i zbiór kinematycznie dopuszczalnych przemieszczeń zdefiniowany przez (12) - (13) w obszarze  $\Omega_\rho$  zamiast  $\Omega$ .

Zagadnienie (20) - (21) sformułowane w obszarze  $\Omega_\rho$  ma postać: *wyznacz*  $(u_\rho, \lambda_\rho) \in K_\rho \times \Lambda$  *spełniające*

$$\int_{Q_\rho} \ddot{u}_\rho(v - \dot{u}_\rho) dxdt + a^0(u_\rho, v - \dot{u}_\rho) + a^1(\dot{u}_\rho, v - \dot{u}_\rho) - \quad (30)$$

$$\int_{\gamma_2} \lambda_{\rho T} \sigma_T (v - \dot{u}_\rho) dsd\tau \geq \int_{Q_\rho} f(v - \dot{u}_\rho) dxdt + \int_{\gamma_1} p(v - \dot{u}_\rho) dsd\tau \quad \forall v \in K_\rho,$$

$$\int_{\gamma_2} \sigma_T \dot{u}_{\rho T} dsd\tau \leq \int_{\gamma_2} \zeta_T \dot{u}_{\rho T} dsd\tau \quad \forall \zeta_T \in \Lambda. \quad (31)$$

## Lemma

Niech  $f$  i  $p$  będą odpowiednio regularne. Pochodna topologiczna  $TJ_\phi(\Omega, x_0)$  funkcjonału (22) w punkcie  $x_0 \in \Omega$  ma postać:

$$TJ_\phi(\Omega, x_0) = - \int_0^T [(\ddot{u} + f)(\phi + r^{adt}) + \frac{1}{E}(a_u a_{r^{adt} + \phi} + 2b_u b_{r^{adt} + \phi} \cos 2\delta)]|_{x=x_0} d\tau, \quad (32)$$

gdzie

$$a_u \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_I(u) + \sigma_{II}(u), \quad b_u \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_I(u) - \sigma_{II}(u), \quad (33)$$

$\sigma_I(u)$  oraz  $\sigma_{II}(u)$  oznaczają naprężenia główne odpowiadające przemieszczeniu  $u$  spełniającemu układ (30) - (31) i elementom składowym tensora naprężeń  $\sigma_{ij}(u)$ ,  $i, j = 1, 2$ , równe:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} + \sigma_{12}}, \quad (34)$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} + \sigma_{12}}. \quad (35)$$

$\delta$  jest kątem pomiędzy kierunkami wyznaczonymi przez naprężenia główne określonym następująco:

$$\tan 2\delta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (36)$$

$E$  - moduł Younga.



# Pochodna topologiczna funkcjonału - 3

Stan sprzężony  $(r_\rho^{adt}, q_\rho^{adt}) \in K_{\rho 1} \times \Lambda_1$  spełnia w obszarze  $\Omega_\rho$  następujący układ równań:

$$\int_{Q_\rho} (\ddot{r}_\rho^{adt} + \phi)\zeta \, dx d\tau + \mathbf{a}^0(r_\rho^{adt} + \phi, \zeta) + \mathbf{a}^1(r_\rho^{adt} + \phi, \dot{\zeta}) + \int_{\gamma_2} (\sigma_{\rho T} - q_{\rho T}^{adt}) \dot{\zeta}_T \, ds d\tau = 0 \quad \forall \zeta \in K_{1\rho}, \quad (37)$$

$$r_\rho^{adt}(T, \mathbf{x}) = 0, \quad \dot{r}_\rho^{adt}(T, \mathbf{x}) = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} (\phi_T + r_{\rho T}^{adt}) \eta_T \, ds d\tau = 0 \quad \forall \eta \in \Lambda_1, \quad (38)$$

Ponadto  $r_\rho^{adt}|_{\rho=0} = r^{adt}(x_0)$ . Zbiory  $K_{\rho 1}$  oraz  $\Lambda_1$  są zadane przez

$$K_{\rho 1} = \{ \xi \in F_{sp\rho} : \dot{\xi}_N = 0 \text{ na } A^{st} \}, \quad (39)$$

$$\Lambda_1 = \{ \zeta \in \Lambda : \zeta(x) = 0 \text{ na } B_1 \cup B_2 \cup B_1^+ \cup B_2^+ \}, \quad (40)$$

$A^{st} = \{ x \in \Gamma_2 : \dot{u}_N = 0 \}$ . Ponadto  $B_1 = \{ x \in \gamma_2 : \lambda(x) = -1 \}$ ,  
 $B_2 = \{ x \in \gamma_2 : \lambda(x) = +1 \}$ ,  $\tilde{B}_i = \{ x \in B_i : \dot{u}_N(x) = 0 \}$ ,  $i = 1, 2$ ,  
 $B_i^+ = B_i \setminus \tilde{B}_i$ ,  $i = 1, 2$ .

- przekształcenie funkcjonału kształtu w funkcjonał zdefiniowany w obszarze  $\Omega_\rho$
- wyznaczenie pochodnej kształtu tego funkcjonału względem parametru  $\rho$
- wyznaczenie pochodnych rozwiązań równań stanu i sprzężonych względem parametru  $\rho$ 
  - układ współrzędnych biegunowych z osiami wyznaczonymi przez kierunki naprężeń głównych
  - wyrażenia na rozwinięcie asymptotyczne przemieszczeń, odkształceń, naprężeń względem parametru  $\rho$
  - wykorzystanie rezultatu Z & S [1992]
- przejście do granicy  $\rho \rightarrow 0$

Z formuły Greena wynika: funkcjonał (22) jest równy

$$\begin{aligned}
 J_\phi(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} J_\phi(u(\Omega_\rho)) &= \int_{\gamma_2} \sigma_{\rho N} \phi_N ds = \\
 &\int_{Q_\rho} \ddot{u} \phi dx dt + \int_{Q_\rho} \sigma_{ij}(u_\rho) \varepsilon_{kl}(\phi) dx - \\
 &\int_{Q_\rho} f_i \phi_i dx dt - \int_{\gamma_1} p_i \phi_i ds d\tau + \int_{\gamma_2} \lambda_\rho \phi_T ds d\tau.
 \end{aligned} \tag{41}$$

Pochodna kształtu tego funkcjonału jest równa:

$$\begin{aligned}
 J'_\phi(\rho) = & \int_{Q_\rho} (\ddot{u}'\phi + \sigma_{ij}(u'_\rho)\varepsilon_{kl}(\phi)) dxdt + \\
 & \int_{\gamma_\rho} (\ddot{u}\phi + (\sigma_{ij}(u_\rho)\varepsilon_{kl}(\phi))) dsd\tau + \\
 & \int_{\gamma_\rho} f \cdot \phi dsd\tau + \int_{\gamma_2} (\lambda'_\rho\phi_T + \frac{1}{\rho}\lambda_\rho\phi_T) dsd\tau.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Pochodna kształtu  $(u'_\rho, \lambda'_\rho) \in K_{\rho 1} \times \Lambda_1$  rozwiązania równań stanu:

$$\int_{Q_\rho} (\ddot{u}'\varphi + \sigma_{ij}(u'_\rho) e_{kl}(\varphi) dx) dxdt + \int_{\gamma_\rho} [-\ddot{u}\varphi + \sigma_{ij}(u_\rho) e_{kl}(\varphi)] dsd\tau - \quad (43)$$

$$\int_{\gamma_\rho} (f_i \varphi_i) dsd\tau + \int_{\gamma_2} (\lambda'_\rho \varphi_T + \frac{1}{\rho} \lambda_\rho \varphi_T) dsd\tau \geq 0 \quad \forall \varphi \in K_{\rho 1}, \quad (44)$$

$$\int_{\gamma_2} u'_{\rho T} \zeta ds = 0 \quad \forall \zeta \in \Lambda_1, \quad (45)$$

Pochodna kształtu funkcjonału (42) ma postać:

$$J'_\phi(\rho) = - \int_{\gamma_\rho} [\ddot{u}_\rho(\phi + r_\rho^{adt}) + \sigma_{ij}(u_\rho) e_{kl}(\phi + r_\rho^{adt}) - f(\phi + r_\rho^{adt})] ds d\tau. \quad (46)$$

naprężenie we współrzędnych biegunowych:

$$\sigma_{rr}(u_\rho) = \frac{1}{2} [a_u(1 - \frac{\rho^2}{r^2}) + b_u(1 - 4\frac{\rho^2}{r^2} + 3\frac{\rho^4}{r^4} \cos(2\theta))] + O(\rho^{1-\epsilon}), \quad (47)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(u_\rho) = \frac{1}{2} [a_u(1 + \frac{\rho^2}{r^2}) - b_u(1 + 3\frac{\rho^4}{r^4} \cos(2\theta))] + O(\rho^{1-\epsilon}), \quad (48)$$

$$\sigma_{r\theta}(u_\rho) = -\frac{1}{2} [b_u(1 + 2\frac{\rho^2}{r^2}) - 3\frac{\rho^4}{r^4} \sin(2\theta)] + O(\rho^{1-\epsilon}), \quad (49)$$

gdzie  $\epsilon > 0$ .

## Lemma

Niech  $\Omega^* \in U_{ad}$  będzie rozwiązaniem optymalnym zadania (28). Wówczas istnieją mnożniki Lagrange'a  $\mu_1 \in R$ ,  $\mu_1 \geq 0$  oraz  $\mu_2 \in R$ ,  $\mu_2 \geq 0$ , takie że dla każdego  $x \in \Omega^*$  i dla wszystkich zaburzeń  $\delta\Omega \in U_{ad}$  obszaru  $\Omega^* \in U_{ad}$  takich, że  $\Omega^* \cup \delta\Omega \in U_{ad}$ , dla dowolnego rozwiązania optymalnego  $\Omega^* \in U_{ad}$  zadania (28) spełnione są następujące warunki:

$$TJ_\phi(u(\Omega^*); x) + \mu_1 + \mu_2 dP_D(\Omega^*; x) \geq 0, \quad (50)$$

$$(\mu_1^\sim - \mu_1) \left( \int_{\Omega^*} dx - \text{const}_0 \right) \leq 0, \quad \forall \mu_1^\sim \in R, \quad \mu_1^\sim \geq 0, \quad (51)$$

$$(\mu_2^\sim - \mu_2) (P_D(\Omega^*) - \text{const}_1) \leq 0, \quad \forall \mu_2^\sim \in R, \quad \mu_2^\sim \geq 0, \quad (52)$$



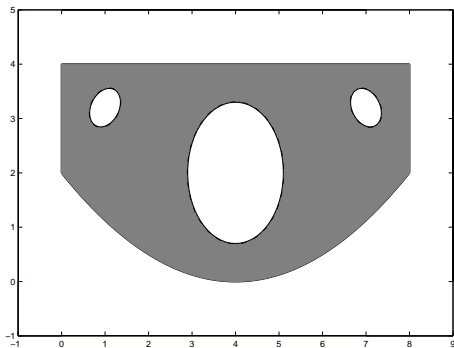
- $u(\Omega^*)$  rozwiązanie zagadnienia stanu (20) - (21) w obszarze  $\Omega^*$ ,
- $\Gamma^* = \partial\Omega^*$ ,
- pochodna topologiczna  $TJ_\phi(u(\Omega^*); x_0)$  jest zadana przez (32)
- $dP_D(\Omega; x_0)$  oznacza pochodną topologiczną funkcjonału pomocniczego  $P_D(\Omega)$  równą

$$dP_D(\Omega; x_0) = 4\pi \quad (53)$$

- Zadana stała  $const_0 > 0$  oraz stała  $const_1 > 0$  są takie same jak w (27).

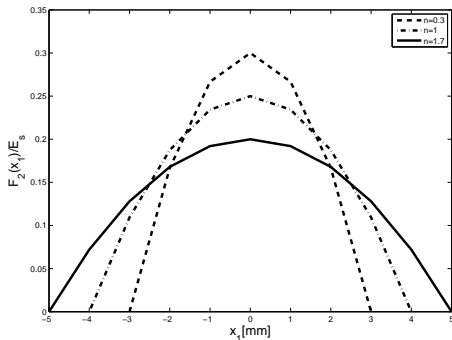
- metoda SIMP
  - inspiracja: metoda homogenizacji; przetwarzanie obrazów
  - transformuje zadanie optymalizacji topologii w zadanie programowania matematycznego na zbiorze wypukłym; zmienna optymalizowana - gęstość materiału każdego pixela
  - chętnie używana przez inżynierów
  - próba uzasadnienia metody w oparciu o pochodną topologiczną; wybór funkcji kary ; (Am 2010)
- metoda pochodnej topologicznej
  - metoda spadku
  - pochodna topologiczna jest stosowana do przewidywania topologii materiału i jego zastępowaniu tak aby spełnić ograniczenie na jego objętość (masę)

- metoda optymalizacji kształtu i topologii
  - obszar początkowy zawiera regularnie rozłożone otwory wypełnione słabym materiałem
  - metoda zbiorów poziomicowych: ewolucja brzegu obszaru jest opisana równaniem Hamiltona - Jacobiego z prawą stroną zawierającą pochodną kształtu i/lub topologiczną (AI, 2004)
  - możliwość dzielenia lub łączenia otworów; brak możliwości tworzenia nowych otworów bez użycia pochodnej topologicznej
  - pochodna topologiczna pozwala lepiej określić topologię materiału niż metoda oparta na wykorzystaniu pochodnej kształtu zastosowana do obszaru z wieloma regularnie rozłożonymi otworami



Rys. 3. Obszar optymalny.

## Materiał gradientowy (FGM)



Rys 4. Napężenie normalne.

- sformułowano zadanie optymalizacji topologii dla ewolucyjnego zagadnienia kontaktowego z zadaniem tarcie
- wyznaczono pochodną topologiczną funkcjonału jakości i sformułowano WK opymalności
- podano rozwiązania numeryczne dla
  - 1 zadania optymalizacji topologii statycznego zagadnienia kontaktowego
  - 2 zagadnienia kontaktu tocznego z materiałem gradientowym
- Kierunki badań:
  - wykorzystanie macierzy polaryzacji w sformułowaniu pochodnej topologicznej
  - zagadnienie na wartości własne - analiza wrażliwości