KLASYFIKACJA ZACHOWAŃ WYBRANYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Wojciech MITKOWSKI
Katedra Automatyki
Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
Zielona Góra, 22 listopada 2010

WPROWADZENIE

- Podstawowe kierunki badań
- Zachowania klasyczne i „dziwne”
- Diagnostyka dziwnych zachowań
- Źródła zachowań „chaotycznych”
- System pojęciowy
- Przykłady
- Uwagi końcowe

DWA PODSTAWOWE KIERUNKI BADAŃ

- Poszukiwanie zachowań regularnych (np. stabilnych w różny sposób).
- Poszukiwanie i zrozumienie zachowań nieregularnych (chaos).

ZACHOWANIA REGULARNE

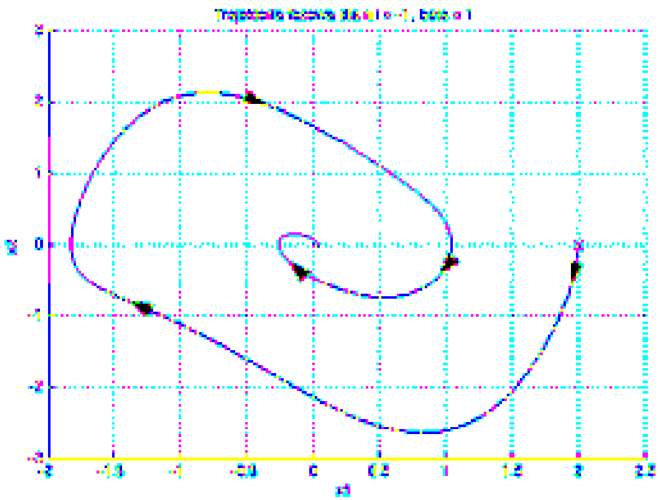
- Globalna asymptotyczna stabilność
- Asymptotyczna stabilność-zbiory przyciągania
- Stabilność praktyczna
- Trajektorie okresowe
- Parametry określające zachowania
- Układy liniowe

STABILNOŚĆ PRAKTYCZNA

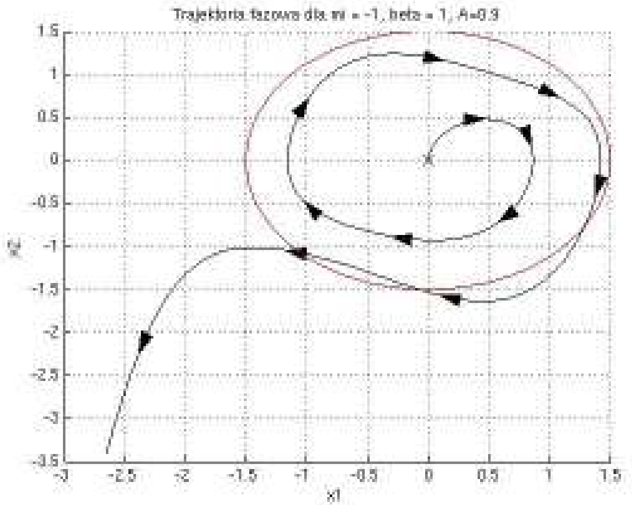
RÓWNANIE VAN DER POLA:

$$\ddot{x} + \mu(a^2 x^2 - 1)\dot{x} + \beta x = \delta \sin t$$

$x_1 = x,\ x_2 = \dot{x},\ a = 1.$ $\beta = 1, \quad \mu = -1$



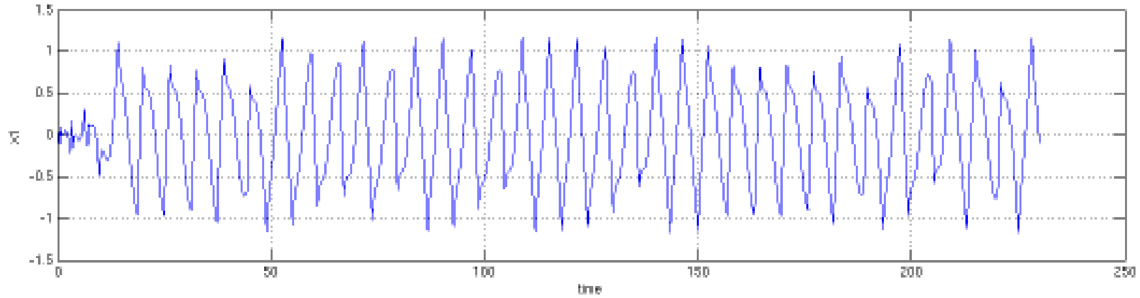
$\delta = 0$

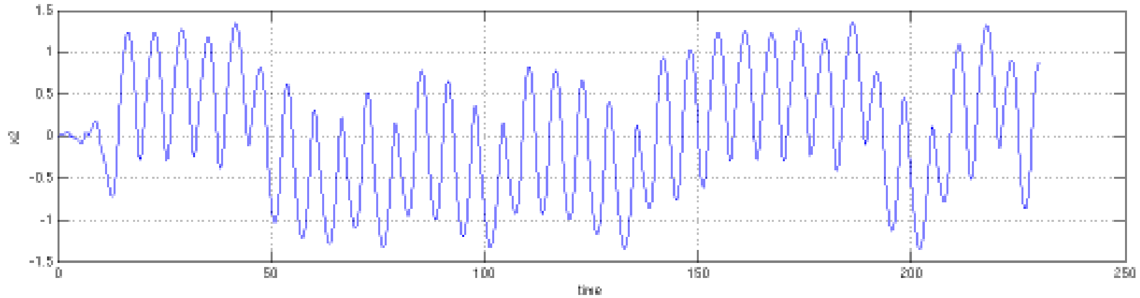


$\delta = 0.9$

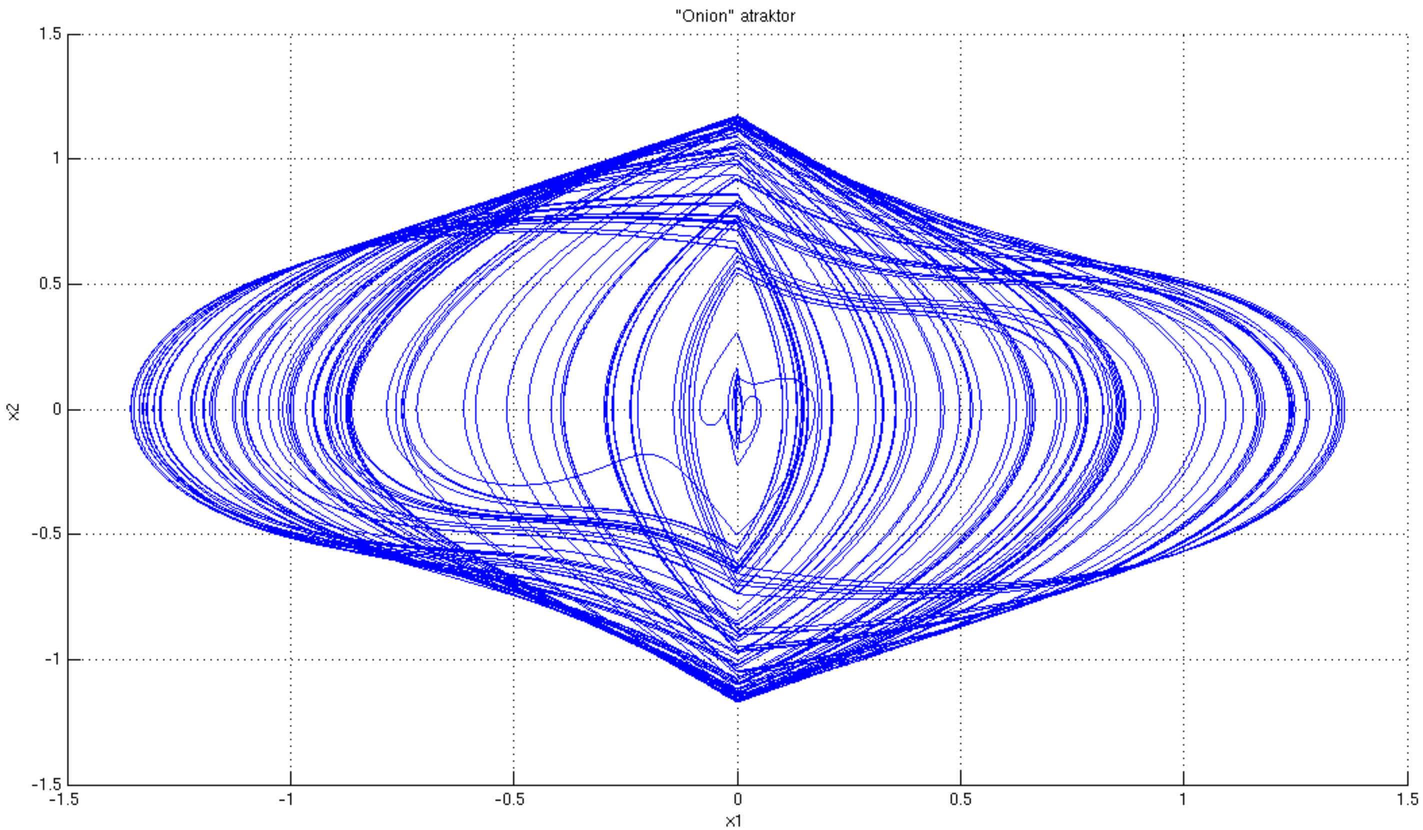
DZIWNE ZACHOWANIA I STABILNOŚĆ PRAKTYCZNA

$$\ddot{x} + a\dot{x} - x + bsign(x) = \delta \sin(\omega t)$$

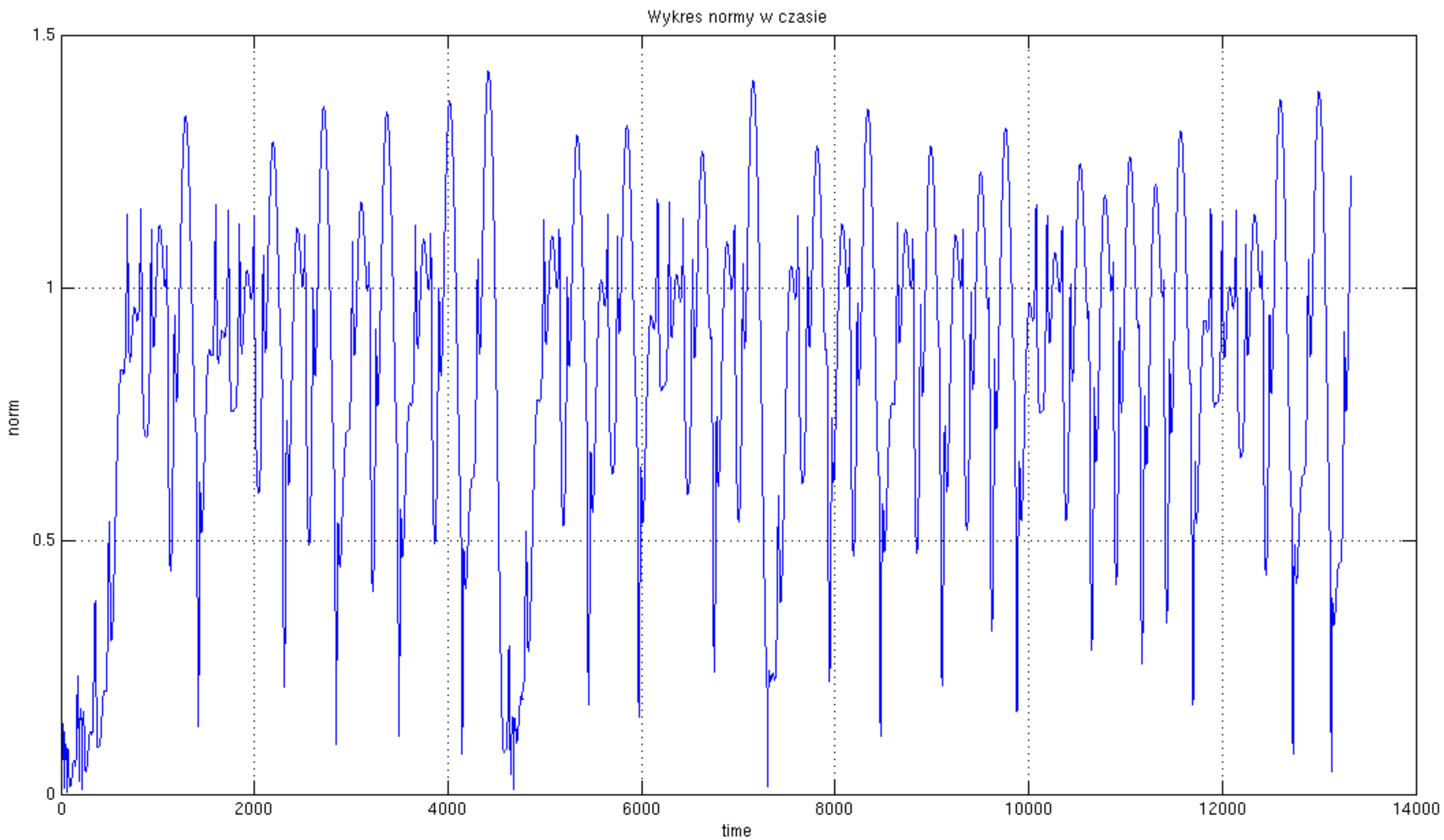




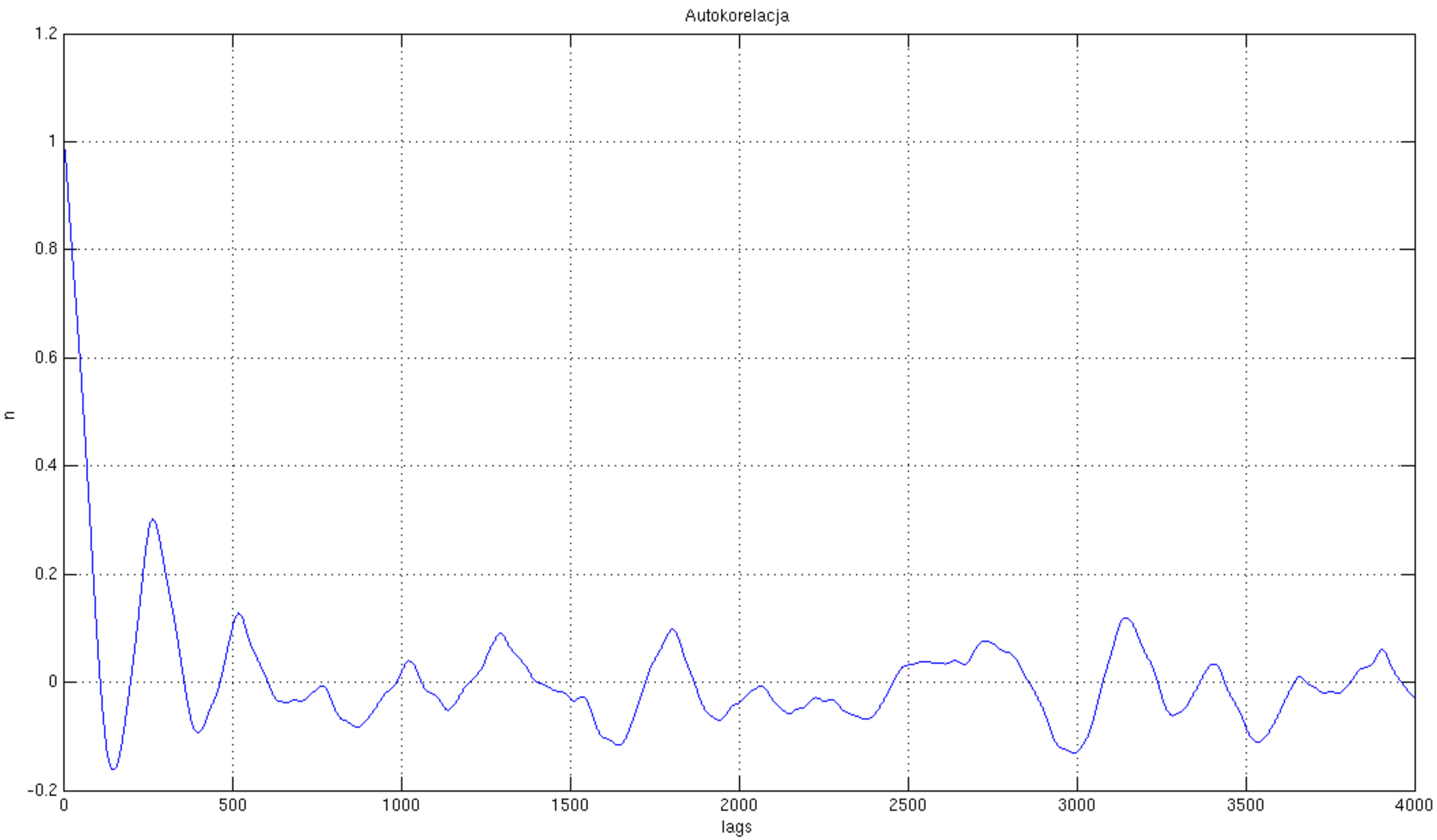
"ONION" ATRAKTOR



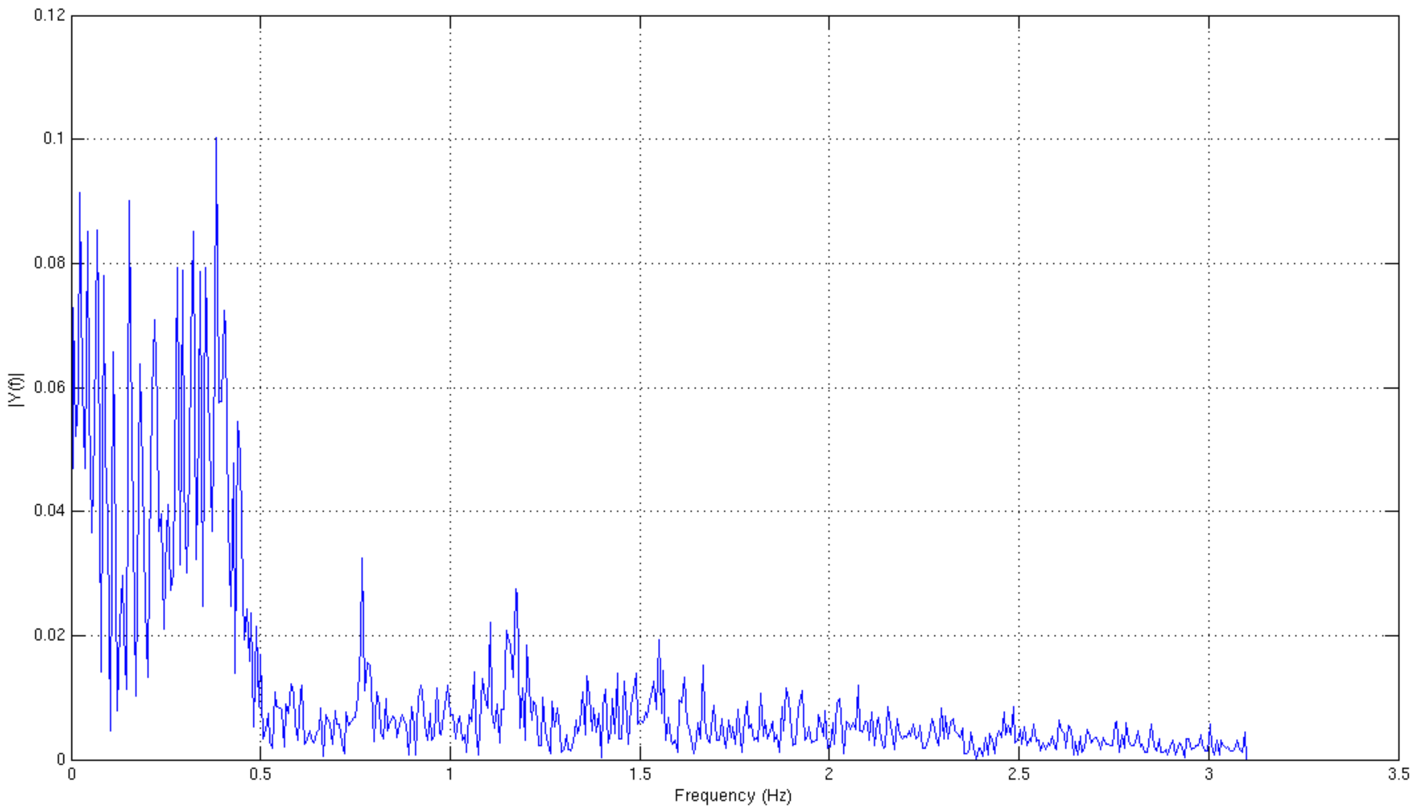
NORMA W CZASIE



AUTOKORELACJA



ANALIZA WIDMOWA



DIAGNOSTYKA DZIWNYCH ZACHOWAŃ

- Obserwacja „normy” w czasie
- Atraktor
- Autokorelacja
- Analiza widmowa
- Inne

WYBRANE HIPOTEZY BADAWCZE

$$Ocena \text{ "}wrazeniowa\text{"}$$

$$Istnienie\ atraktora \Rightarrow chaos\ (Tuc\text{ker } 1999)$$

$$Sygnaly\ okresowe \Rightarrow autokorelacja\ okresowa$$

$$Szybkie\ zanikanie\ autokorelacji \Rightarrow chaotycznosc\ sygnalu$$

$$Wykladnicze\ zanikanie\ autokorelacj \Rightarrow mieszanie$$

$$Widmo\ szerokopasmowe\ z\ \ jednym\ ostrzem \Rightarrow chaos$$

DETERMINIZM A PRZYPADKOWOŚĆ

- „Chaos” deterministyczny
- Szum losowy (przypadkowy)
- **Metody badania chaosu tworzą pomost pomiędzy zachowaniami deterministycznymi i przypadkowymi**

KIEDY MOŻEMY MÓWIĆ O CHAOSIE ? -INTUICJA

1. Potok trajektorii ma deterministyczny i prosty opis.
2. Zachowania trajektorii są skomplikowane i przypadkowe.

- Przypadkowość oznacza, że potok jest nieprzewidywalny i trajektorie są wrażliwe na małe perturbacje warunków początkowych – potok wygląda jak szum losowy.

ŹRÓDŁA DYNAMIKI „CHAOTYCZNEJ”

- Różnego rodzaju nieliniowości.
- Czas ciągły - $n>2$.
- Czas dyskretny - $n>0$.
- „Chaos” w układach liniowych – ale nieskończenie wymiarowych.
- Wiele (setki) różnych definicji „chaosu”.

TRZY RÓŻNE PODEJŚCIA BADANIA CHAOSU

1. Makroskopowe: badanie całego potoku, w konsekwencji szukanie atraktorów o skomplikowanej strukturze.
2. Mikroskopowe: badanie własności poszczególnych trajektorii, trajektorii niestabilnych, turbulentnych lub gęstych w przestrzeni stanu.
3. Stochastyczne: wykorzystuje teorię ergodyczną – bada się istnienie ergodycznej miary niezmienniczej.

WYBRANE POJĘCIA
W CELU WPROWADZENIE
PORZĄDKU

UKŁAD DYNAMICZNY (*X, f*)

$\{f^t\}_{t\geq 0}$ *uklad* (*semidynamiczny*) *dynamiczny na X*

$$f^t : X \to X, \quad t \geq 0$$

$$f^0 = I, \quad f^{t+s} = f^t \circ f^s, \quad t, s \geq 0$$

$f : [0,\infty) \times X \to X$ *jest ciagla*

Przykłady:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \geq 0$$

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

$$f = e^A, \quad X = R^n$$

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$x(k) = A^k x(0)$$

$$f = A$$

UKŁAD MINIMALNY

$* \, Zbi\acute{o}r\ niezmienniczy: \quad D \subset X : f(D) \subset D$

$* \, Gdy\ D\ jest\ domkniety,\ czyli\ para\ (D, f\,|_D)\ jest\ ukladem\ dynamicznym,$

$to\ m\acute{o}wimy: D\ jest\ podukladem\ (X, f)$

•Układ, który nie posiada żadnych niepustych właściwych podukładów nazywamy układem minimalnym.
•Jeżeli domknięty zbiór niezmienniczy wyznacza układ minimalny, to nazywamy go zbiorem minimalnym.
•**Układ jest minimalny wtedy i tylko wtedy, gdy każda orbita jest gęstym podzbiorem przestrzeni fazowej** (domknięcie dowolnej orbity jest zawsze podukładem).

UKŁAD DYSKRETNY

$$(Trajektoria)\, orbita\ punktu\ \ x_0 \in X\ wzgledem\ f$$

$$O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}$$

$$x_k = f(x_{k-1}) = f^k(x_0), \quad k \geq 0$$

$*\ Punkt\ okresowy\ x_0\ dla\ f$

$\exists n \geq 1 : f^n(x_0) = x_0$

$*\ Okres\ podstawowy$

$najmniejsza\ liczba\ m \geq 1 : f^m(x_0) = x_0$

$*\ Cykl\ o\ dlugosci\ m\ (m - cykl) - orbita\ punktu$

$okresowego\ o\ okresie\ podstawowym\ m.$

$*\ Zbior\ punktów\ okresowych - Per(f)$

$*\ Zbiór\ punktów\ staych - Fix(f) = \{x : f(x) = x\}$

ZASADA ODWZOROWAŃ ZWĘŻAJĄCYCH

(Stefan Banach, Kraków 30.03.1892-Lwów 31.08.1945)

$$F : X \to X, \quad \rho(F(x_1), F(x_2)) \le \alpha\rho(x_1, x_2),$$

$$\alpha \in (0,1), \quad x_1, x_2 \in X$$

$$\exists !\, x^o : x^o = F(x^o)$$

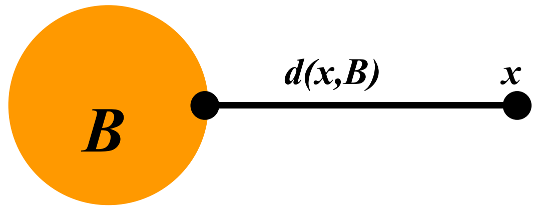
$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0,1,2,3,\ldots \quad x_0 \in X$$

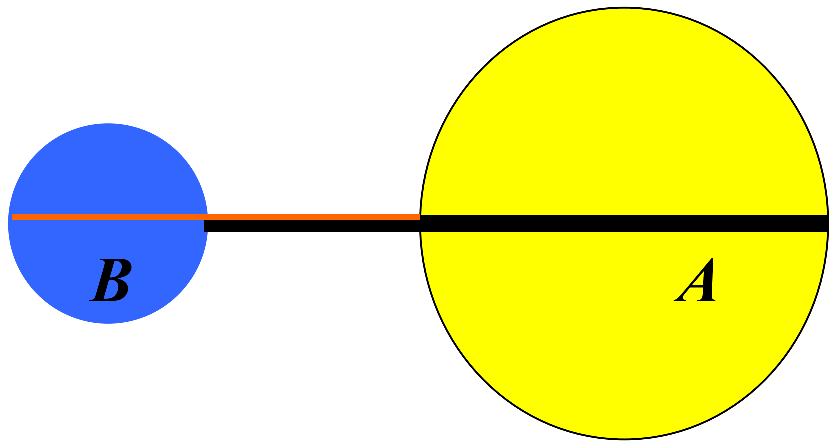
$$x_n \to x^o$$

$$\rho(x^o, x_m) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\, \rho(x_0, F(x_0)), \quad m = 0,1,2,3,\ldots$$

PRZESTRZEŃ FRAKTALI

METRYKA HAUSDORFFA





$$d(A,B) = \max_{x \in A} d(x,B) \qquad d(B,A) = \max_{y \in B} d(y,A)$$

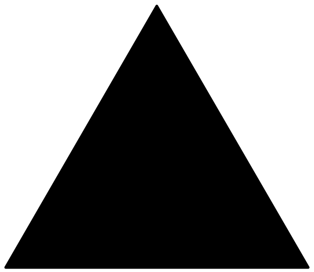
$$h(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\}$$

ODWZOROWANIA ITEROWANE

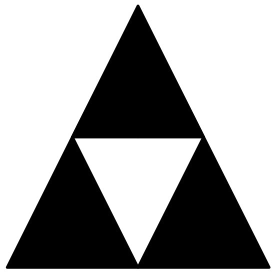
$$x(i+1) = Ax(i) + b, \quad x(0) = 0, \quad i = 0,1,2,3,\ldots$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

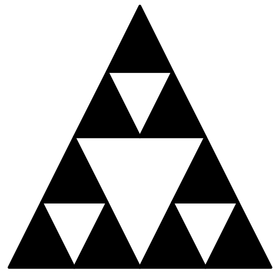
TRÓJKĄT SIERPIŃSKIEGO



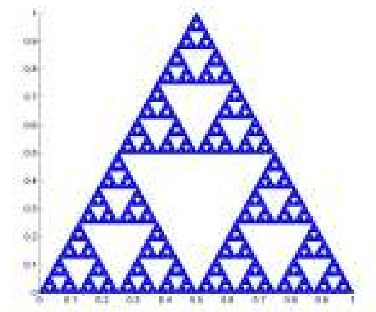
n=1



n=2



n=3



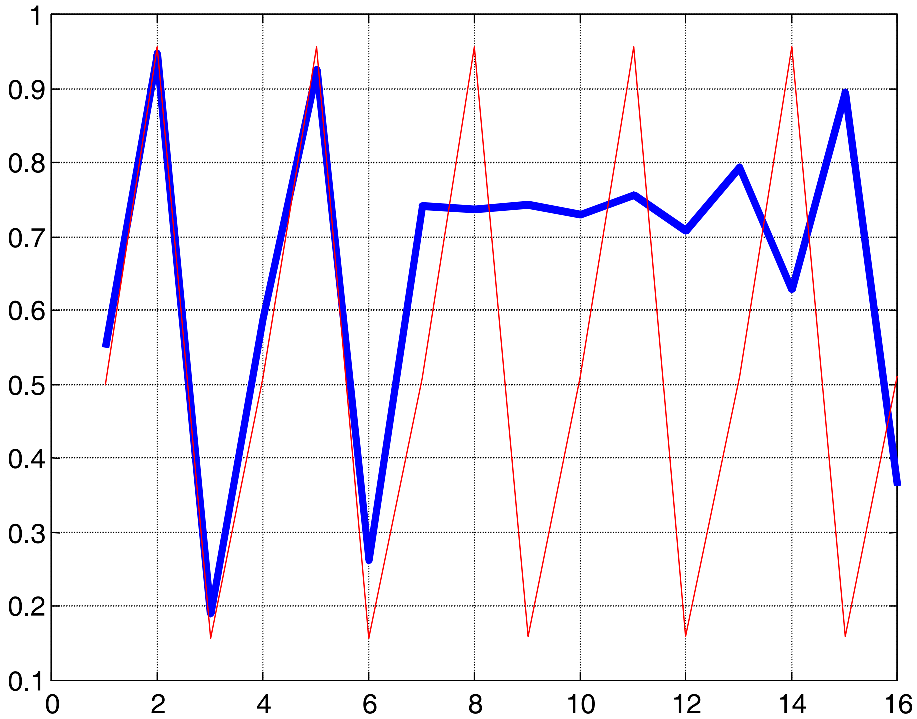
n=10 000

$$h(A_n, A_m) < 2^{-n} \quad dla \quad n < m$$

ODWZOROWANIE ODCINKA [0, 1] W SIEBIE

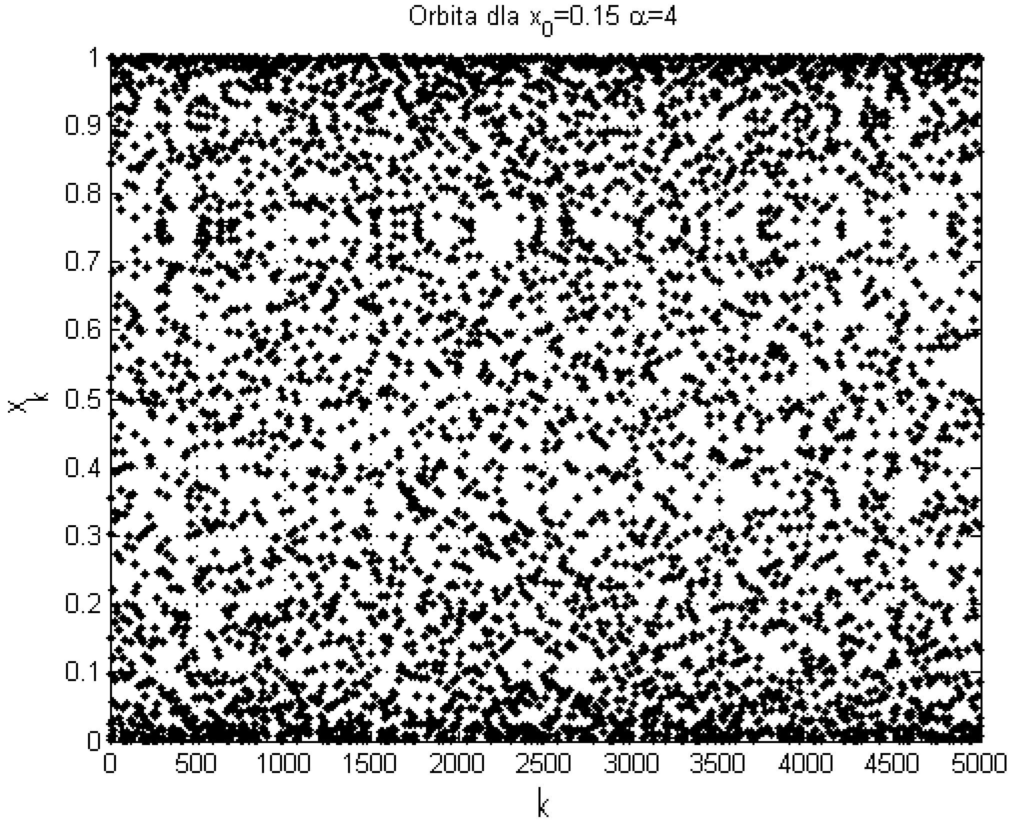
$$x(i+1) = F(x(i), \lambda), \quad F(x, \lambda) = \lambda x(1-x), \quad i = 1,2,3,4,5,..$$

$$generator\,(\lambda,\, n,\, x(0))$$

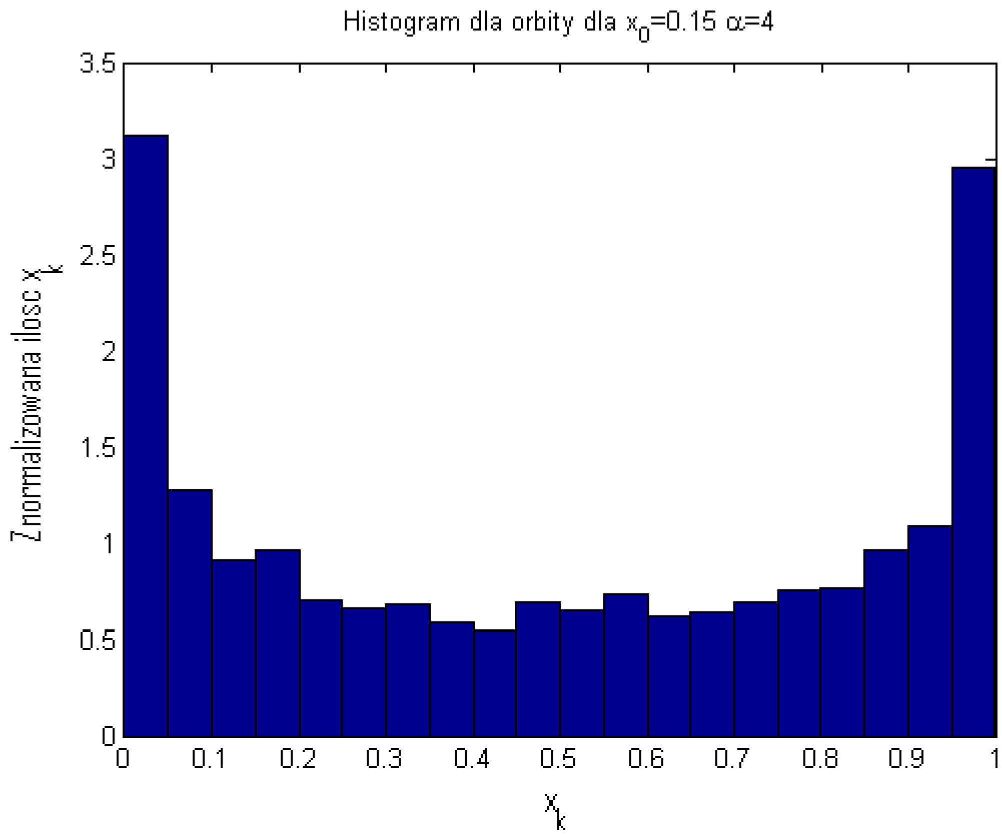


generator(3.8284,15,0.5) **generator(3.8284,15,0.55)**

ORBITA dla lambda=4



Histogram dla orbity

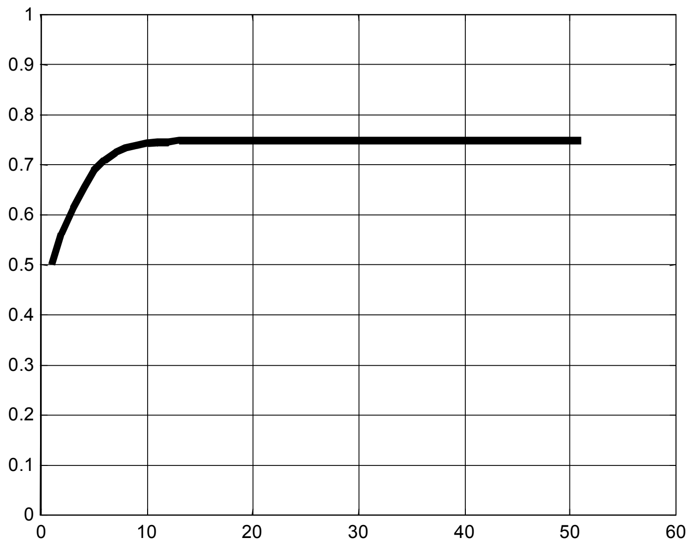


ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

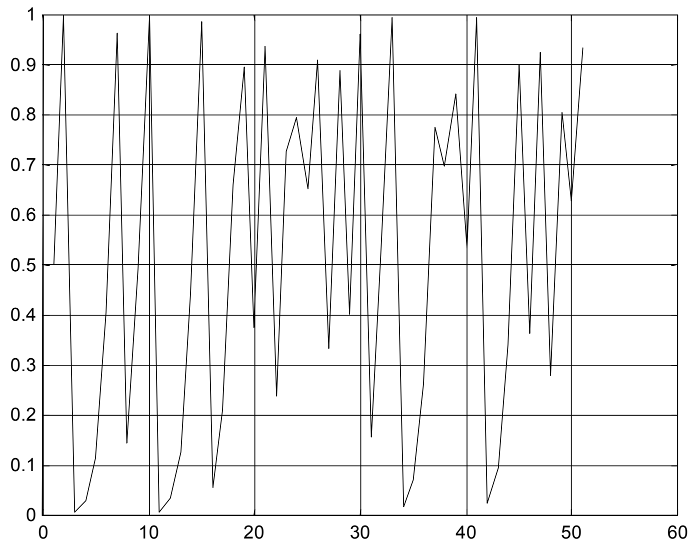
$$\dot{x}(t) = ax(t)^2 + bx(t) + c$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{h} = ax_i^2 + bx_i + c, \quad x_i = x(ih), \quad i = 0, 1, 2, ...$$

$$a = -1,\ b = 3/4,\ c = 0,\ x(0) = 0.5$$



$h = 0.5$



$h = 3.99$

ORBITY OKRESOWE

PORZĄDEK SZARKOWSKIEGO (1964)

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \ldots$$

$$\ldots \succ 2^2\cdot 3 \succ 2^2\cdot 5 \succ 2^2\cdot 7 \succ \ldots \succ 2^3\cdot 3 \succ 2^3\cdot 5 \succ 2^3\cdot 7 \succ \ldots$$

$$\ldots \succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \ldots$$

$$\ldots \succ \ldots \succ 2^5 \succ 2^4 \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2^1 \succ 2^0 = 1$$

$$f : [0,1] \to [0,1]$$

Jeżeli ***f*** posiada orbitę okresową o okresie podstawowym ***m*** a ***k*** jest liczbą naturalną mniejszą od ***m*** w porządku Szarkowskiego, to ***f*** posiada także orbitę okresową o okresie podstawowym ***k***.

ZBIÓR CZASÓW PRZEJŚCIA

$$Zbiór\ N(U,V)\ czasów\ przejscia\ z\ U\ do\ V:$$
$$zbiory\ otwarte\ U,V \subset X,$$

$$N(U,V) = \{n \in \mathrm{N} : f^{n}(U) \cap V \neq \Theta\},$$

$$\Theta - zbiór\ \ pusty,\ \mathrm{N} - liczby\ natura\ln e$$

TRANZYTYWNOŚĆ

$$f : X \to X \ jest \ \ tranzytywne$$
$$(uklad \ \ jest \ \ przechodni \ \ \ na \ \ X) \ wtedy \ i \ tylko \ wtedy, \ gdy$$
$$\forall U, V \subset X - niepustych \ \ i \ \ otwartych \ \ \exists n \in \mathrm{N} : f^{n}(U) \cap V \neq \Theta.$$

$$Zbiór \ \ \omega(f, x_0) - zbiór \ \ graniczny \ \ punktu \ \ x_0 \in X :$$
$$zbiór \ \ wszystkich \ mozliwych \ \ punktów \ które \ mozna \ \ uzyskać$$
$$jako \ granice \ \ jakiegoś \ \ podciagu \ ciagu \ O(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\}.$$

$$f \ \ jest \ tranzytywne \Leftrightarrow \exists x \in X : \omega(f, x) = X$$

Każdy układ minimalny jest tranzytywny

Układ (*X, f*) jest tranzytywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych niepustych i otwartych zbiorów *U* i *V* zbiór *N(U,V)* jest nieskończony.

WRAŻLIWOŚĆ NA WARUNKI POCZĄTKOWE

$$f : X \to X \ \ jest\ wrazliwe\ na\ warunki\ \ poczatkowe,$$
$$jezeli\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\ \ i\ \ jego\ otoczenia\ U \quad \exists y \in U \quad \exists n > 0 :$$
$$\rho(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta. \quad \rho - metryka\ w\ X$$

Jeżeli układ tranzytywny (przechodni) i posiada gęsty zbiór punktów okresowych, to jest również wrażliwy na zmiany warunków początkowych (*Banks i inni 1992*).

Wrażliwość na warunki początkowe implikuje niestabilność w sensie Lapunowa.

MIESZANIE I SPLĄTANIE

$$f \ \textit{jest mieszajace, gdy}$$
$$\forall U, V \subset X \ \textit{niepustych otwartych} \ \ \exists N : f^{n}(U) \cap V \neq \Theta \ \ \forall n > N.$$

$$\textit{Zbior } S \subset X \textit{ nazywamy spla}\tan \textit{ym przez } f, \textit{gdy}$$
$$\forall x, y \in S, \ x \neq y \ \textit{zachodzi warunek dla } n \to \infty$$
$$\limsup |f^{n}(x) - f^{n}(y)| > 0 \ \ \textit{oraz} \ \ \liminf |f^{n}(x) - f^{n}(y)| = 0.$$

DEFINICJE CHAOSU

Układ jest chaotyczny w sensie Auslandera i Yorke'a (1980), jeżeli jest tranzytywny i wrażliwy na warunki początkowe.

Układ jest chaotyczny w sensie Li i Yorke'a (1983), gdy istnieje nieprzeliczalny zbiór zbiór splątany *S* w *X*. *Wcześniej w innym języku była to pierwsza definicja chaosu (1975).*

Układ jest chaotyczny w sensie Devaneya (1986), jeżeli jest tranzytywny i zbiór punktów okresowych f jest gęsty w X (oraz f jest wrażliwe na warunki początkowe).

Jeżeli układ tranzytywny (przechodni) i posiada gęsty zbiór punktów okresowych, to jest również wrażliwy na zmiany warunków początkowych (*Banks i inni 1992*).

CHAOS DYSTRYBUCYJNY

W definicji Li i York'a wymaga się by iteracje dwóch punktów nieskończenie wiele razy oddalały się od siebie i zbliżały dowolnie blisko. W chaosie dystrybucyjnym wymaga się dodatkowo by zbliżanie i oddalanie odbywało się odpowiednio często.

PRZYKŁADY

- Równanie Lorenza
- Obwód elektryczny Chuy
- Sieci komórkowe
- Układ LC

RÓWNANIE LORENZA

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \varepsilon\, Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

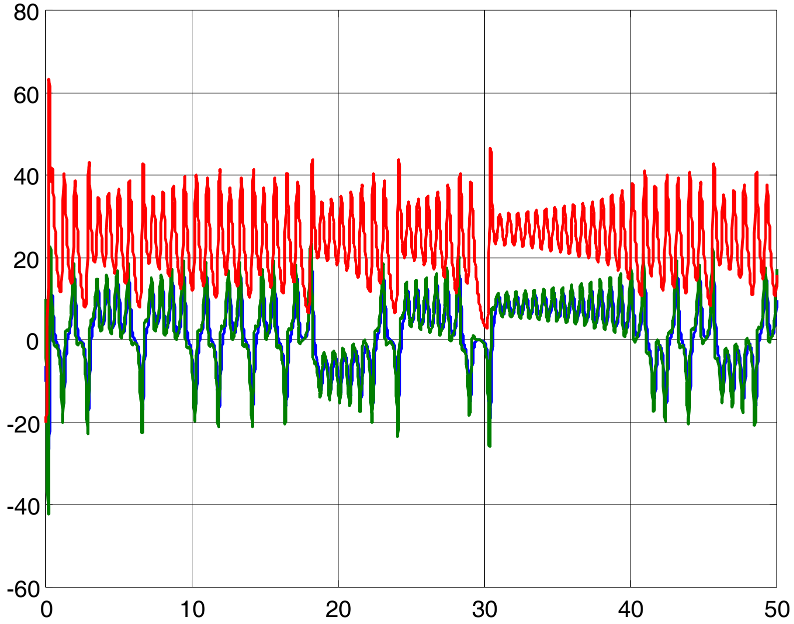
$$Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1 x_1(t) x_3(t) \\ K_2 x_1(t) x_2(t) \end{bmatrix}, \quad x(t) \in R^3, \quad u(t) \in R^2$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0$$

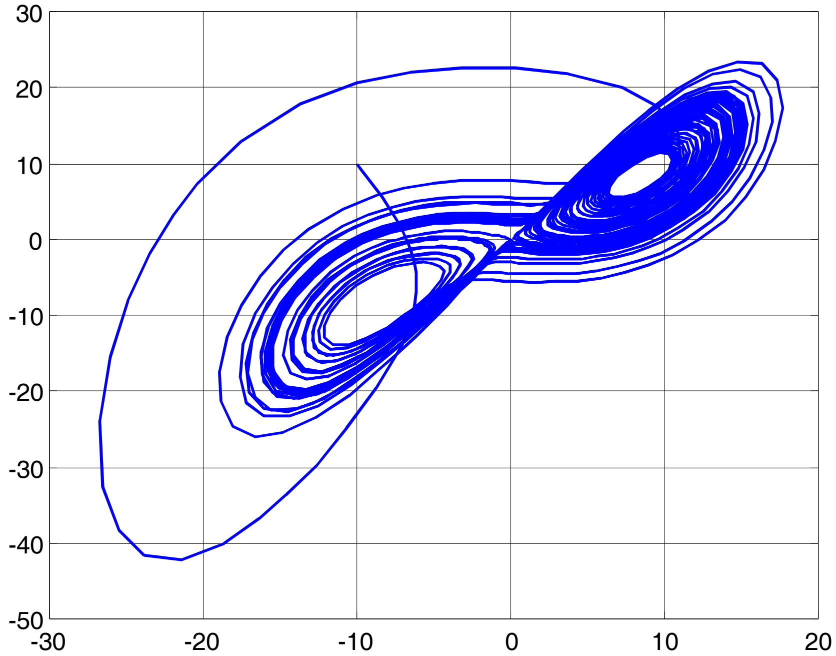
$$u_1(t) = -K_1 x_1(t) x_3(t), \quad u_2(t) = K_2 x_1(t) x_2(t),$$

$$Typowe \quad rownanie, \quad gdy: K_1 = 1, \quad K_2 = 1 \quad \varepsilon = 1$$

LORENZ 1

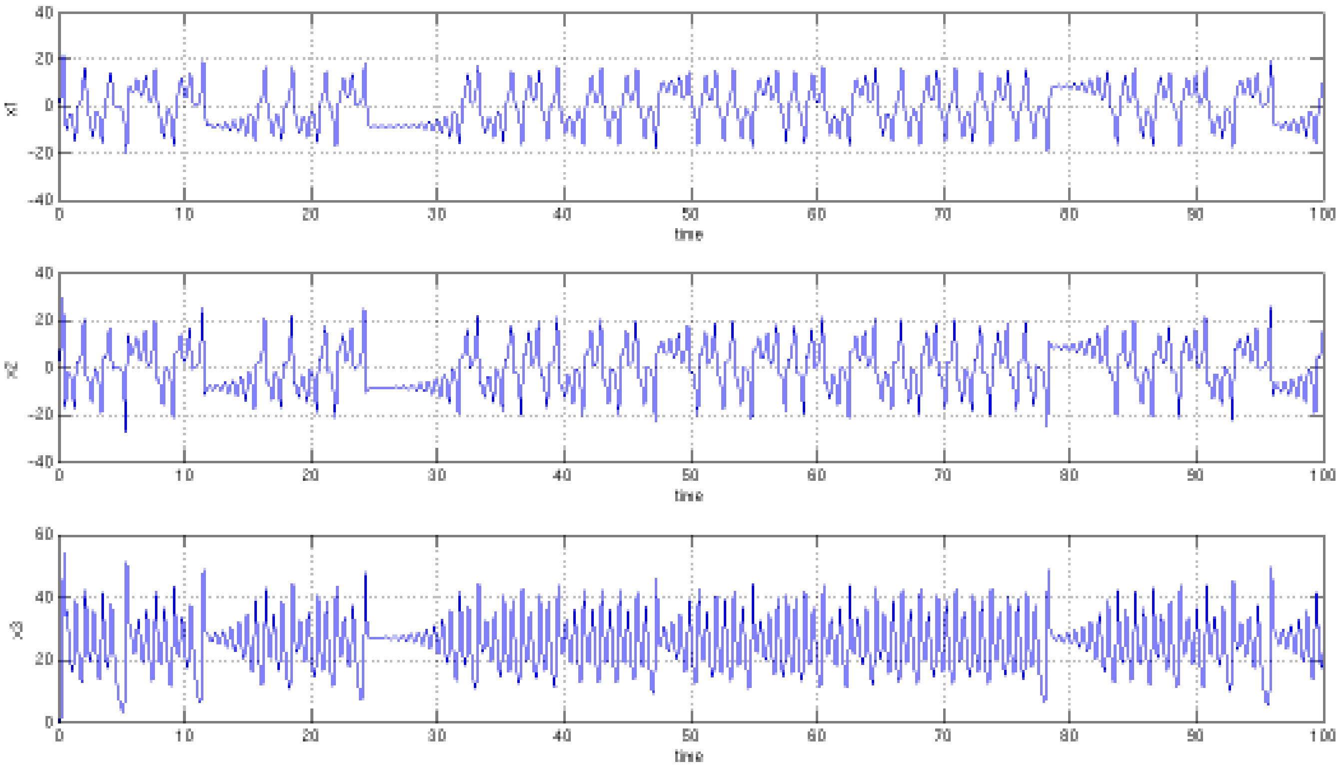


80
60
40
20
0
-20
-40
-60
0
10
20
30
40
50

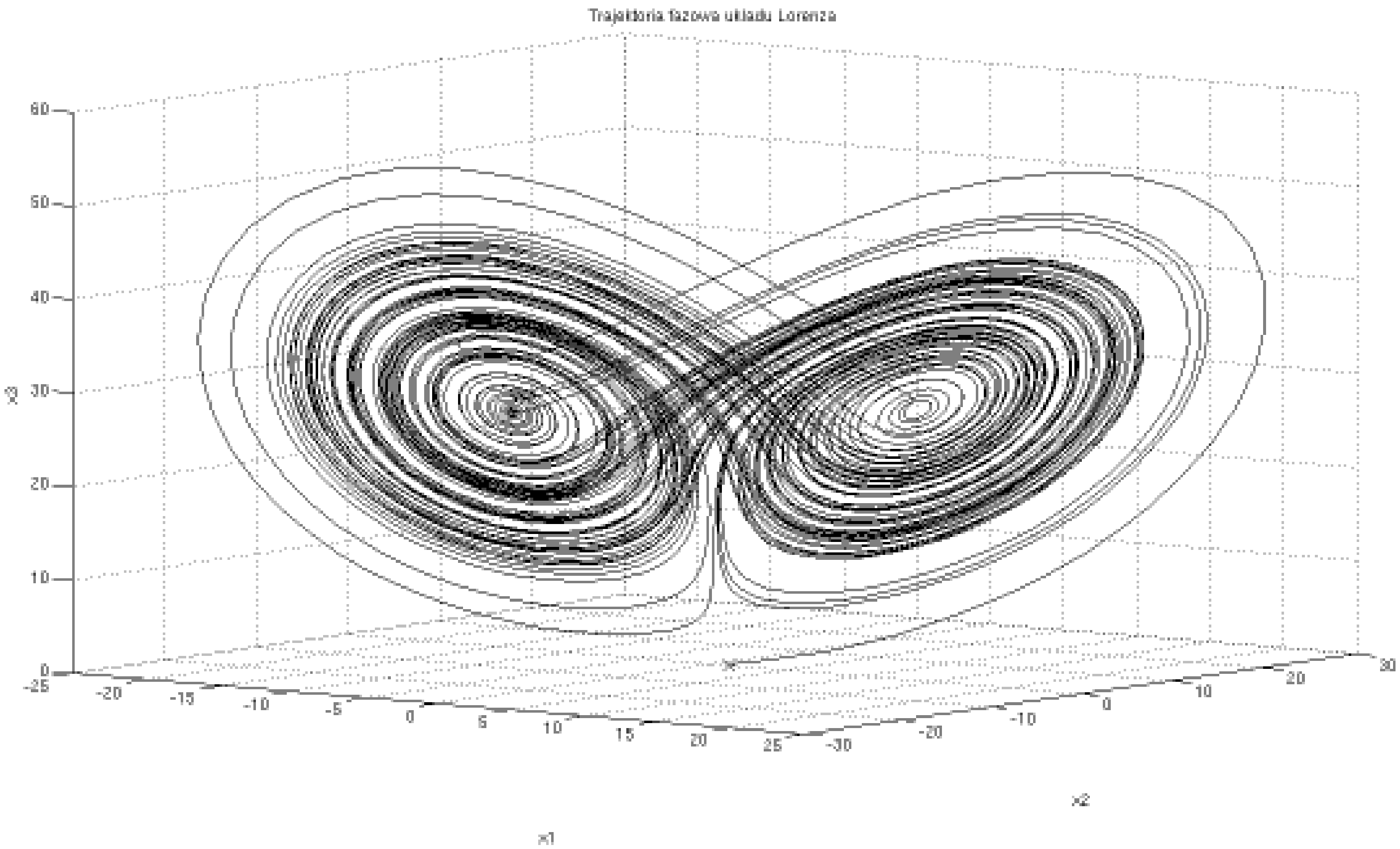


30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-30
-20
-10
0
10
20

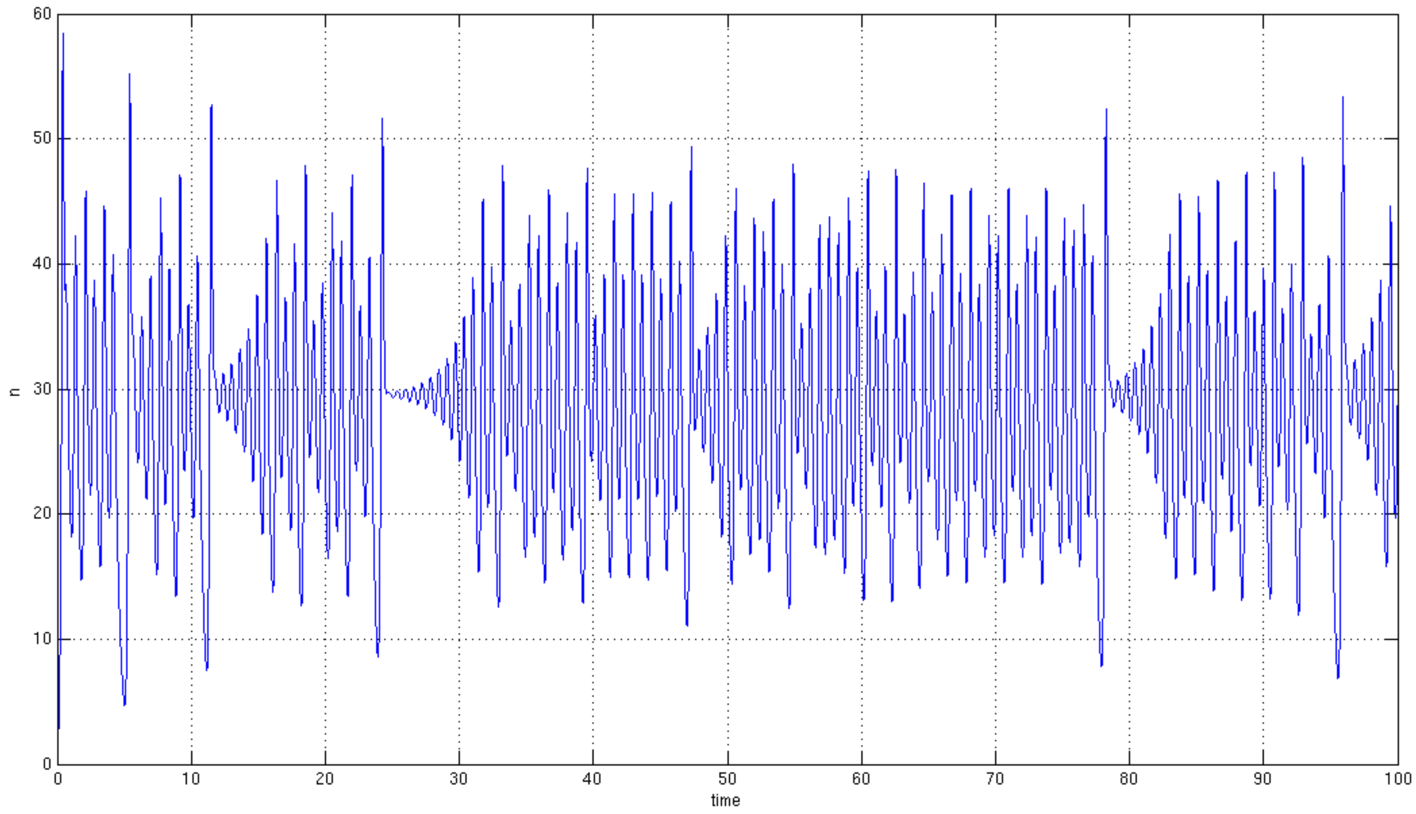
LORENZ 2



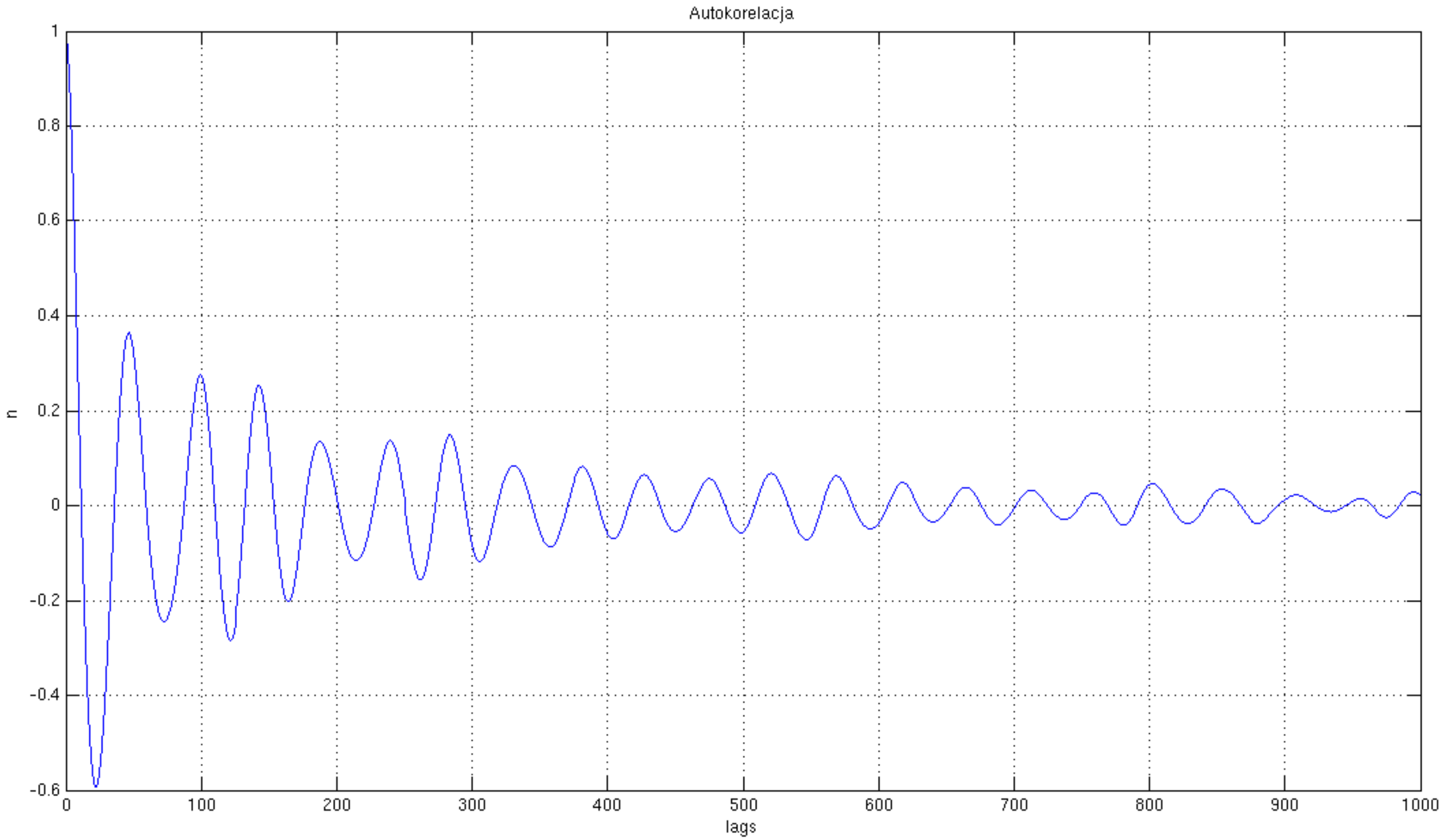
ATRAKTOR LORENZA



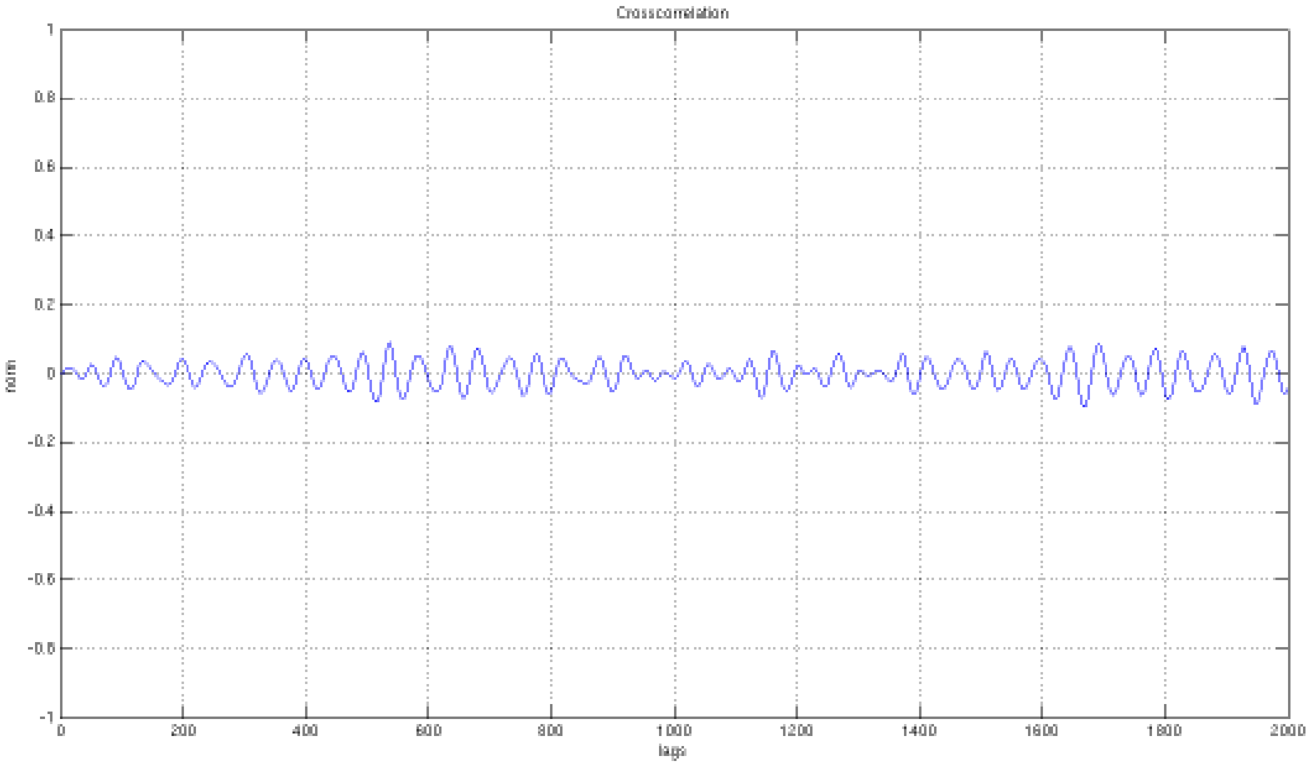
WYKRES NORMY W CZASIE



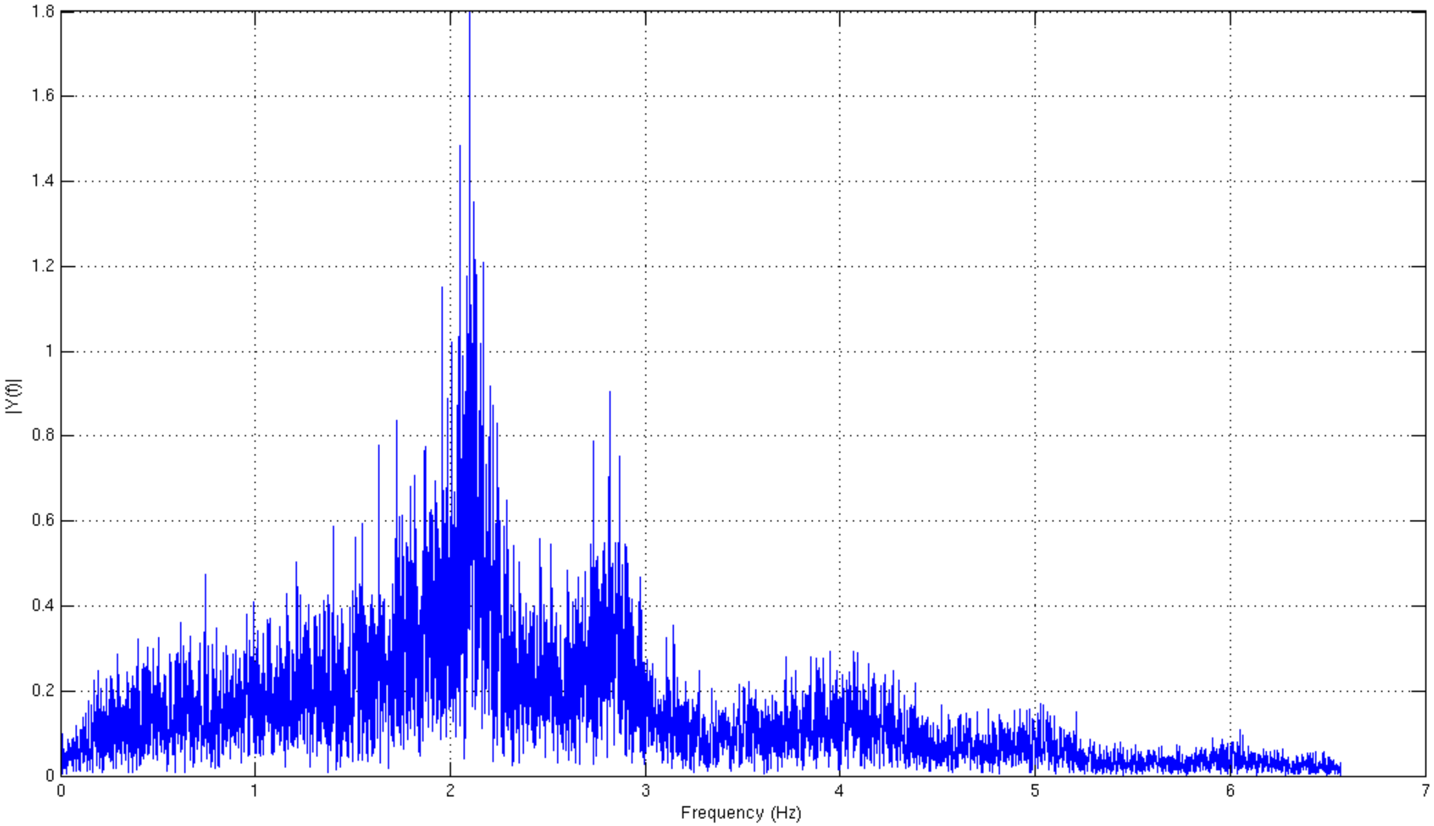
AUTOKORELACJA



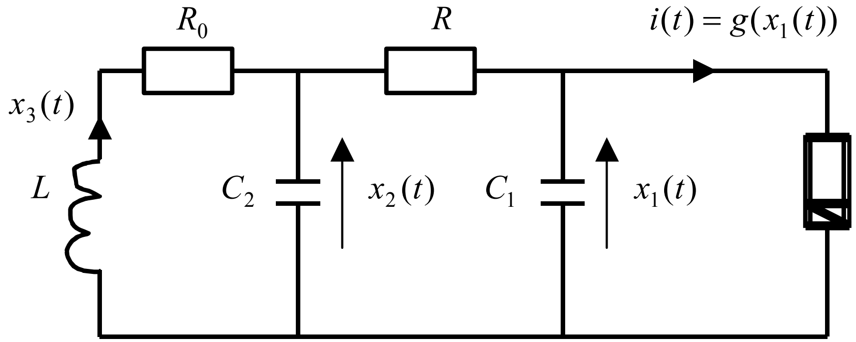
KORELACJA WZAJEMNA, BLISKIE WARUNKI POCZĄTKOWE: (1;0;0) I (1.1;0;0)



ANALIZA WIDMOWA



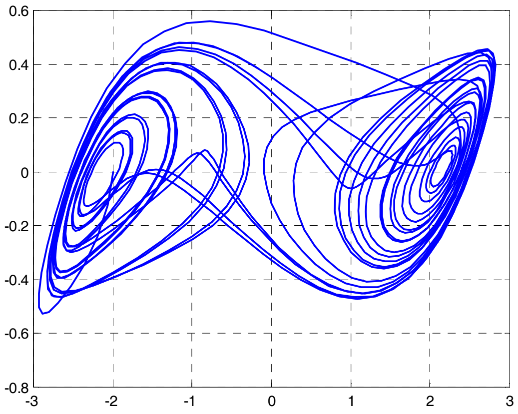
OBWÓD ELEKTRYCZNY CHUY

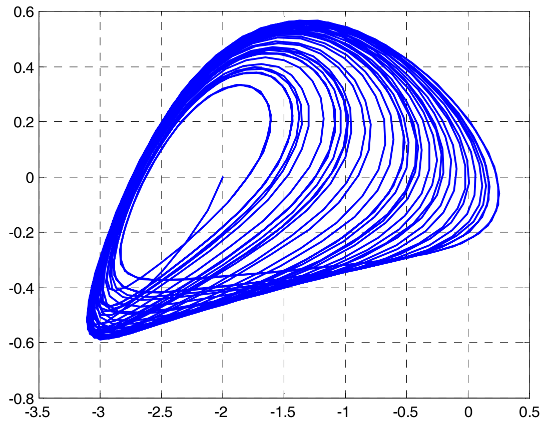


R=2.0

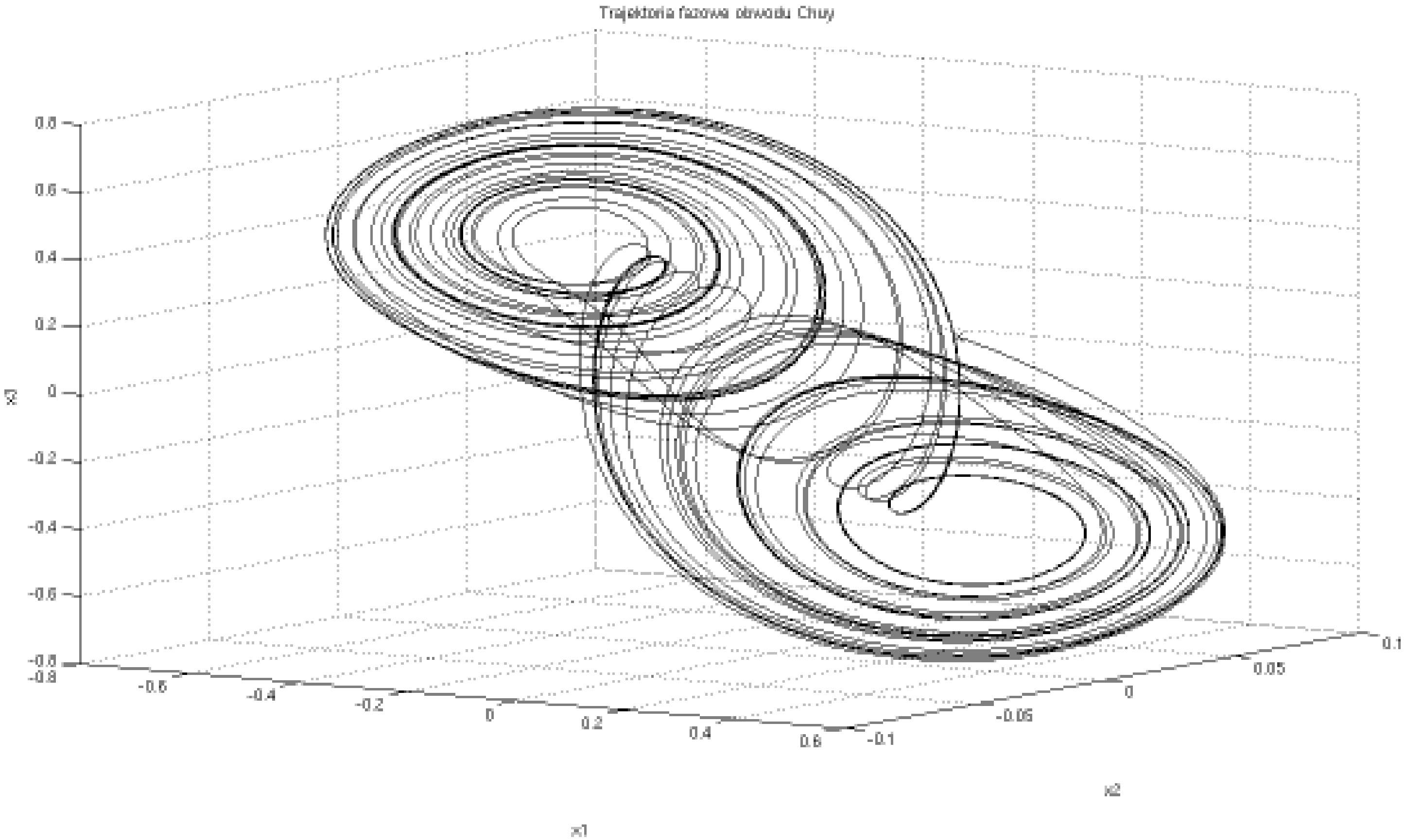
$$g(v) = av + bv^3,\ a < 0,\ b > 0$$

R=2.1

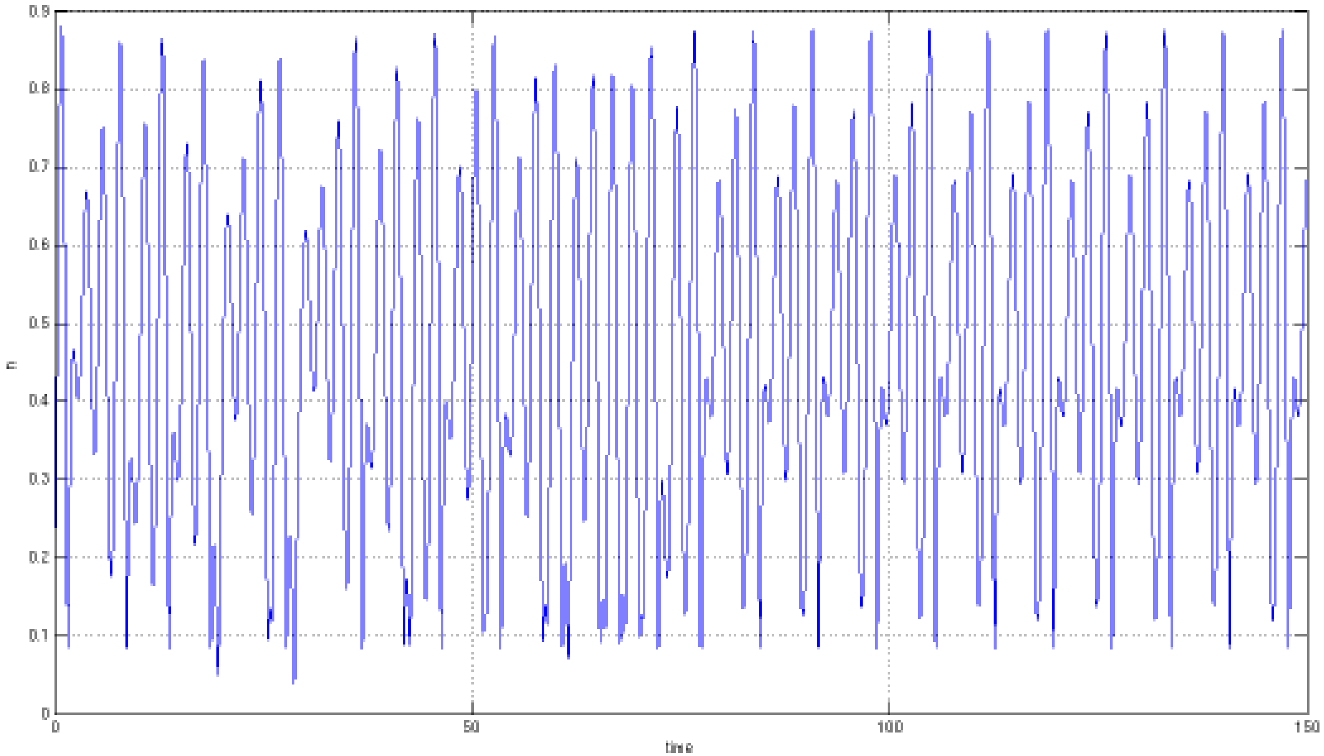




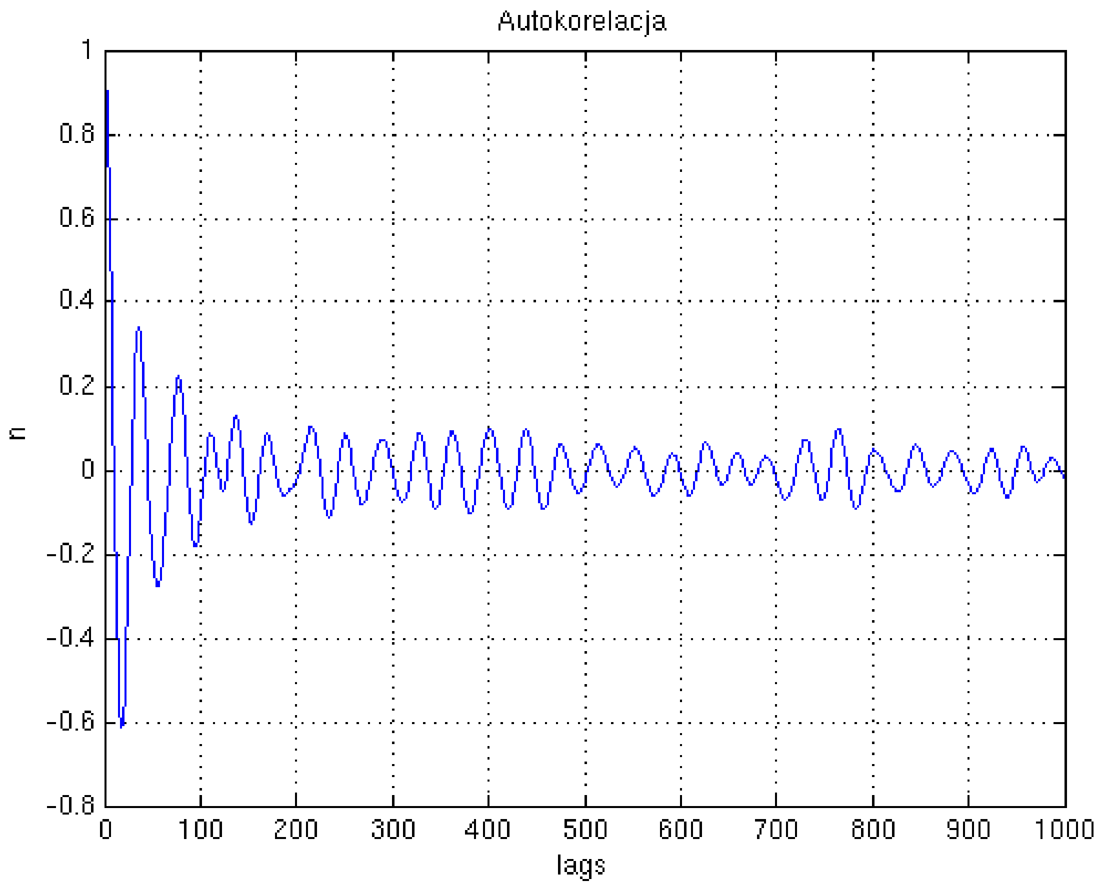
TRAJEKTORIA FAZOWA



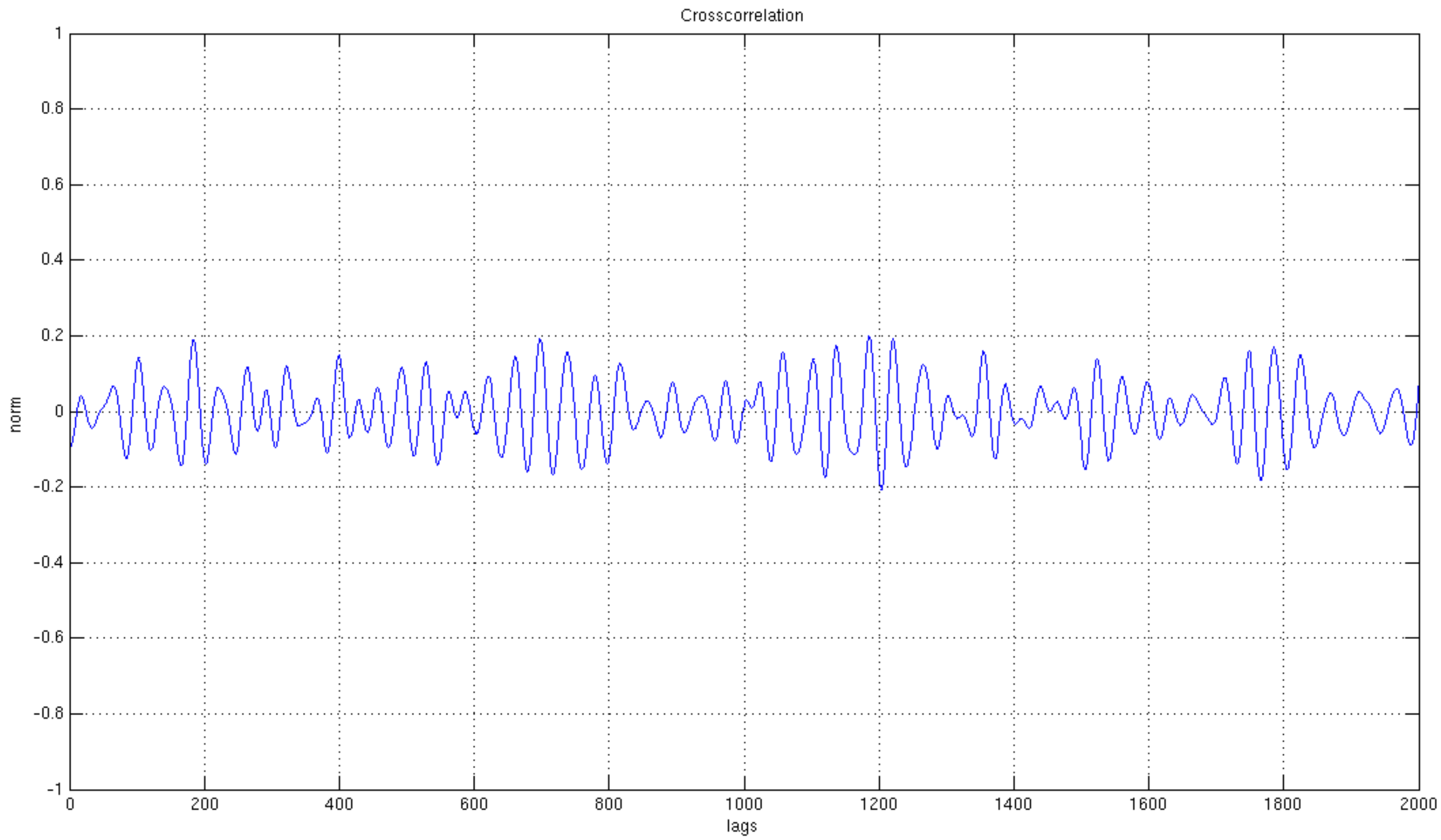
WYKRES NORMY OD CZASU



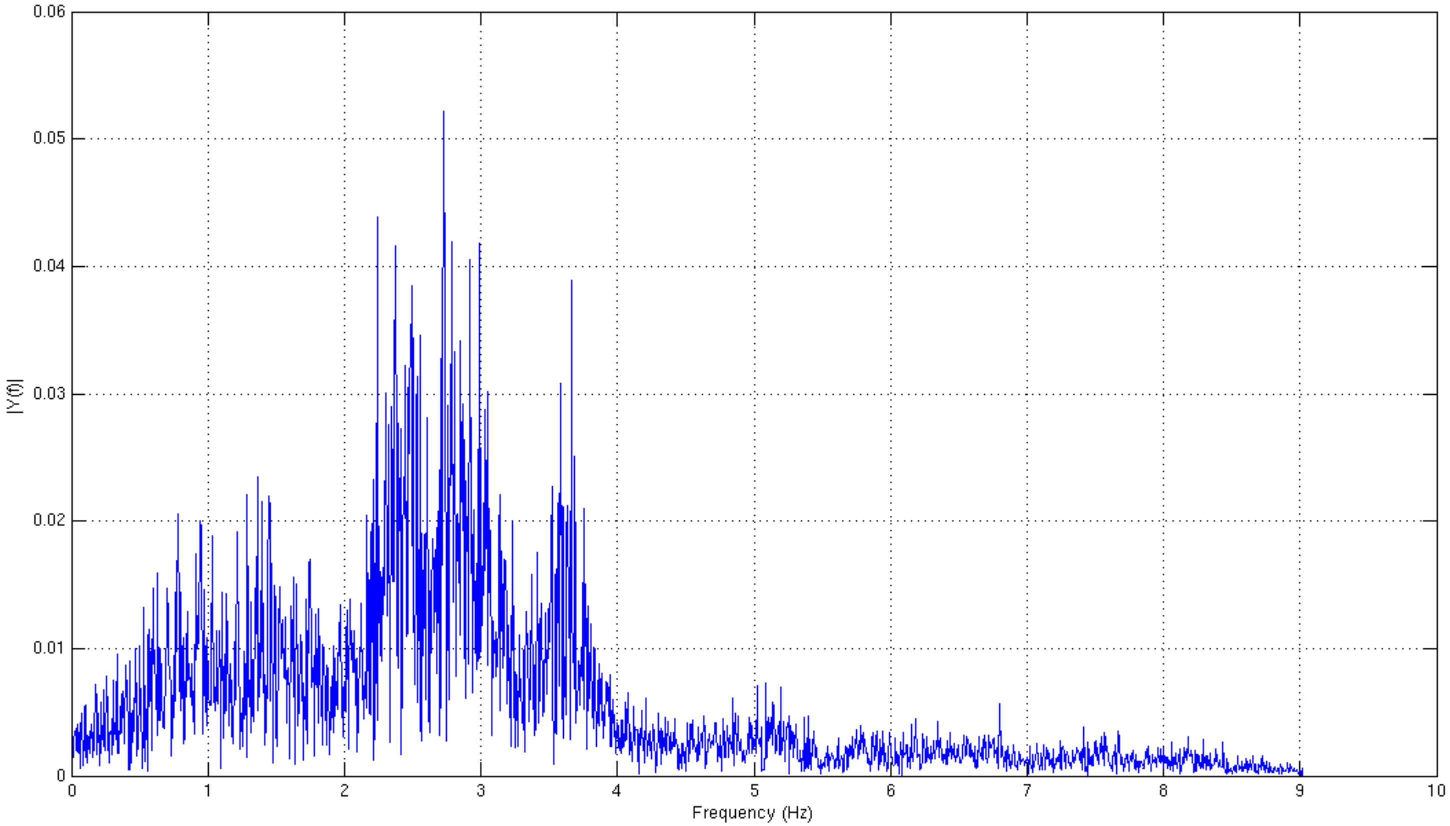
AUTOKORELACJA



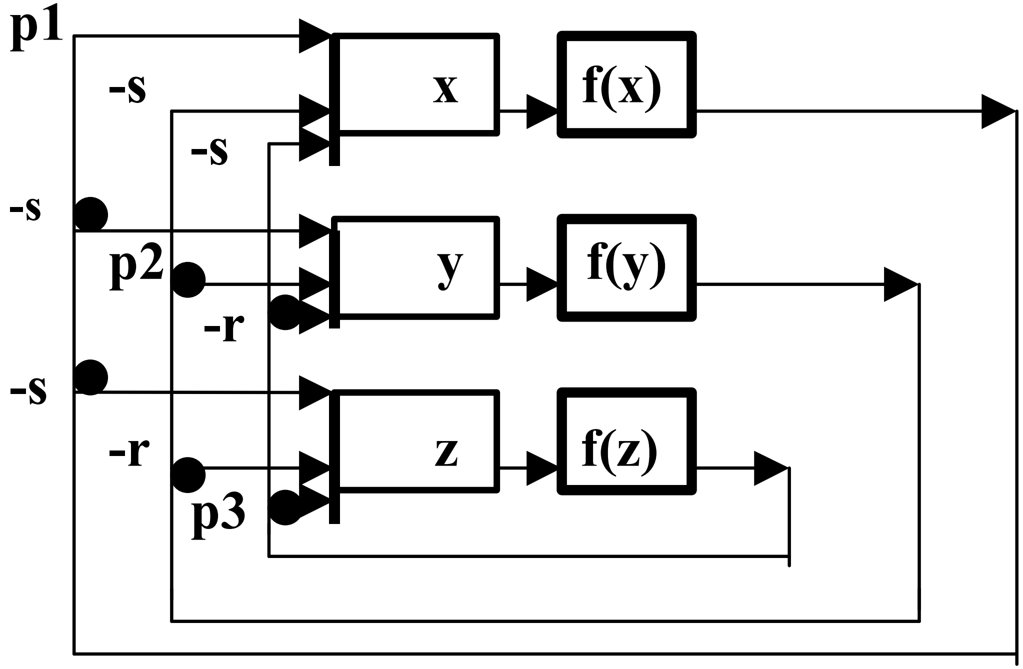
KORELACJA WZAJEMNA, BLISKIE WARUNKI POCZĄTKOWE: (0.1;0.05;0.08) I (0.101;0.05;0.08)

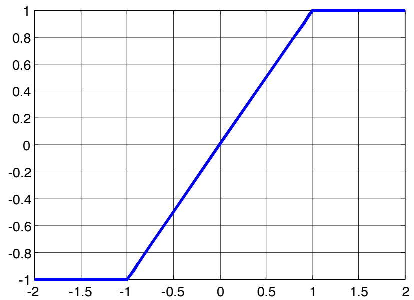


ANALIZA WIDMOWA



SIEĆ KOMÓRKOWA





MODEL SIECI KOMÓRKOWEJ

Galias 1995, s. 26; model złożonej sieci komórkowej.

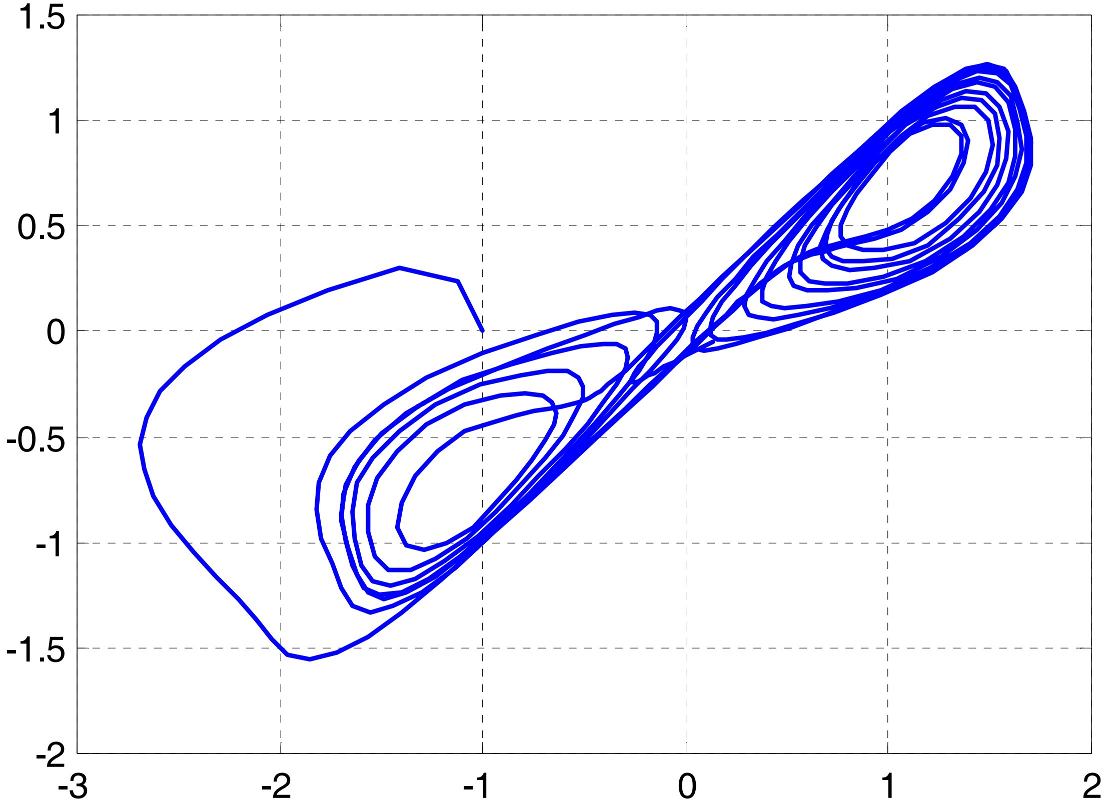
`p1=1.25; p2=1.1; p3=1.0; s=3.2; r=4.4;`

$$\dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} p_1 & -s & -s \\ -s & p_2 & -r \\ -s & -r & p_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

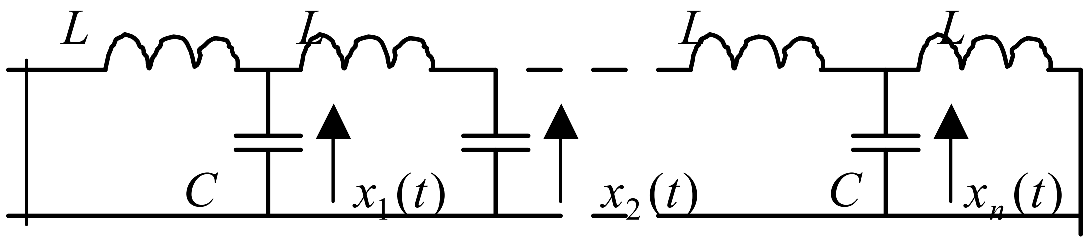
$$u_1(t) = f(x(t)), \quad u_2(t) = f(y(t)), \quad u_3(t) = f(z(t))$$

Trajektoria sieci komórkowej



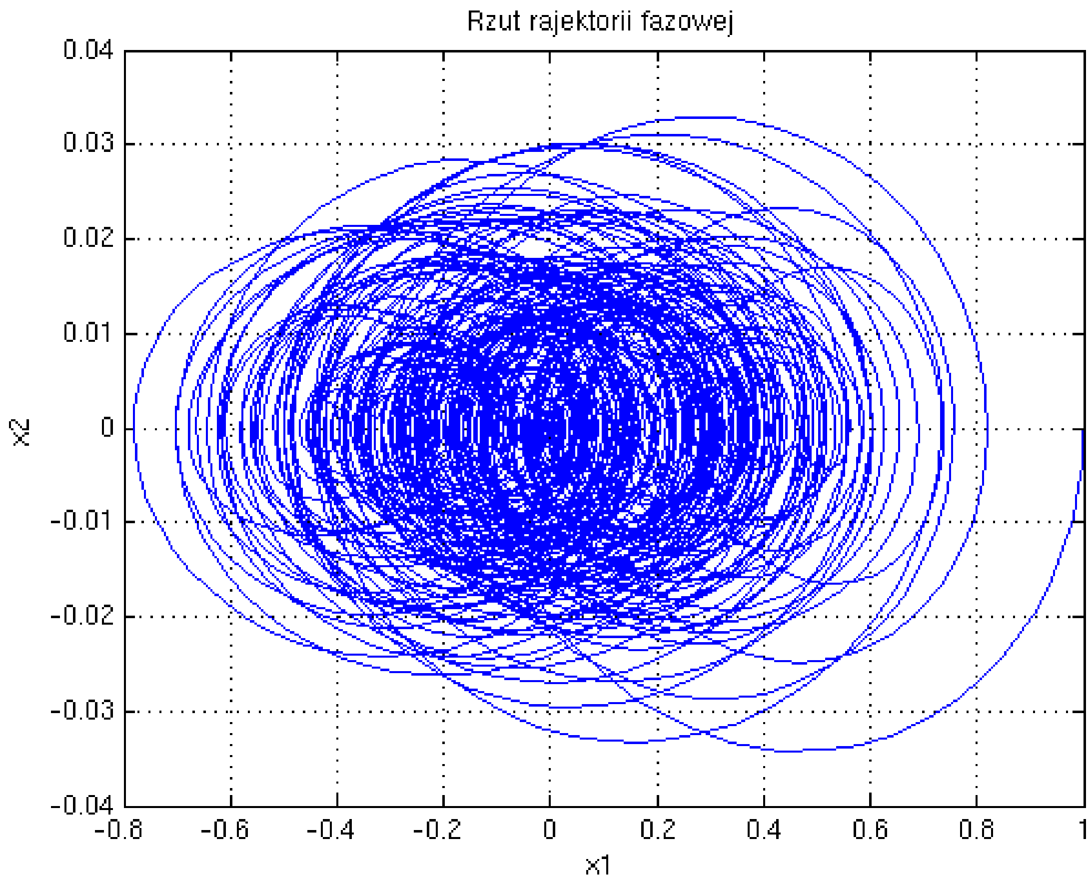
TURBULENCJE W UKŁADZIE LC

$$LC\frac{\partial^2 x(t,z)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x(t,z)}{\partial z^2}, \quad t \geq 0, \quad z \in [0, 1] \qquad x(t,0) = 0, \quad x(t,1) = 0$$

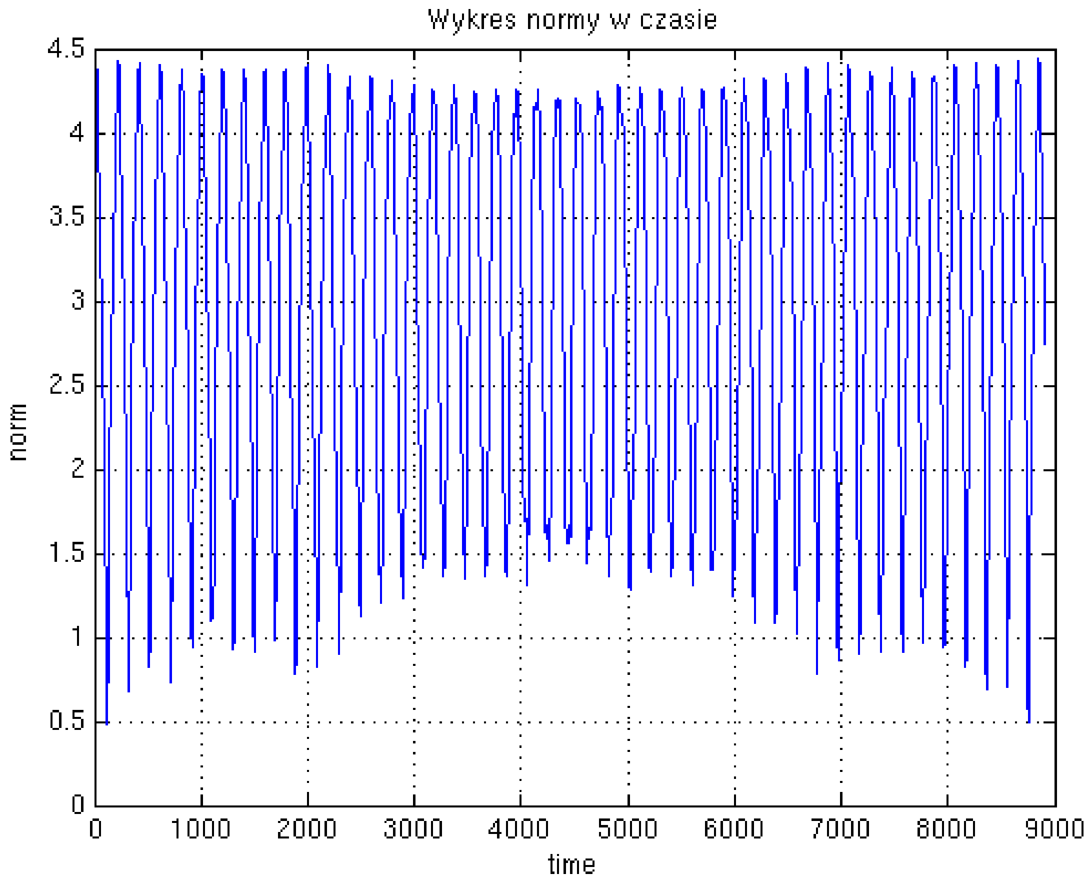


$$\omega_i = \frac{1}{(n+1)}\frac{2}{\sqrt{LC}}\sin\frac{\varphi_i}{2}, \quad \varphi_i = \frac{i\pi}{n+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

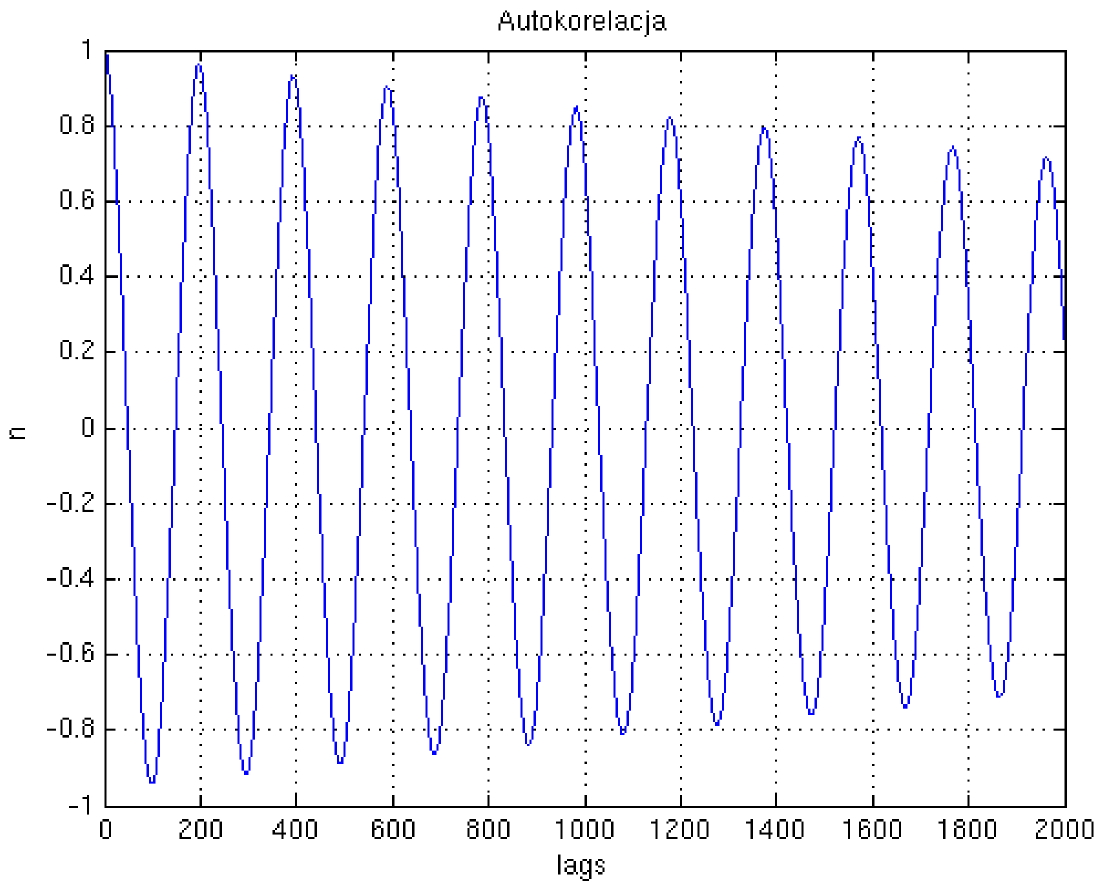
RZUT TRAJEKTORII dla n=20



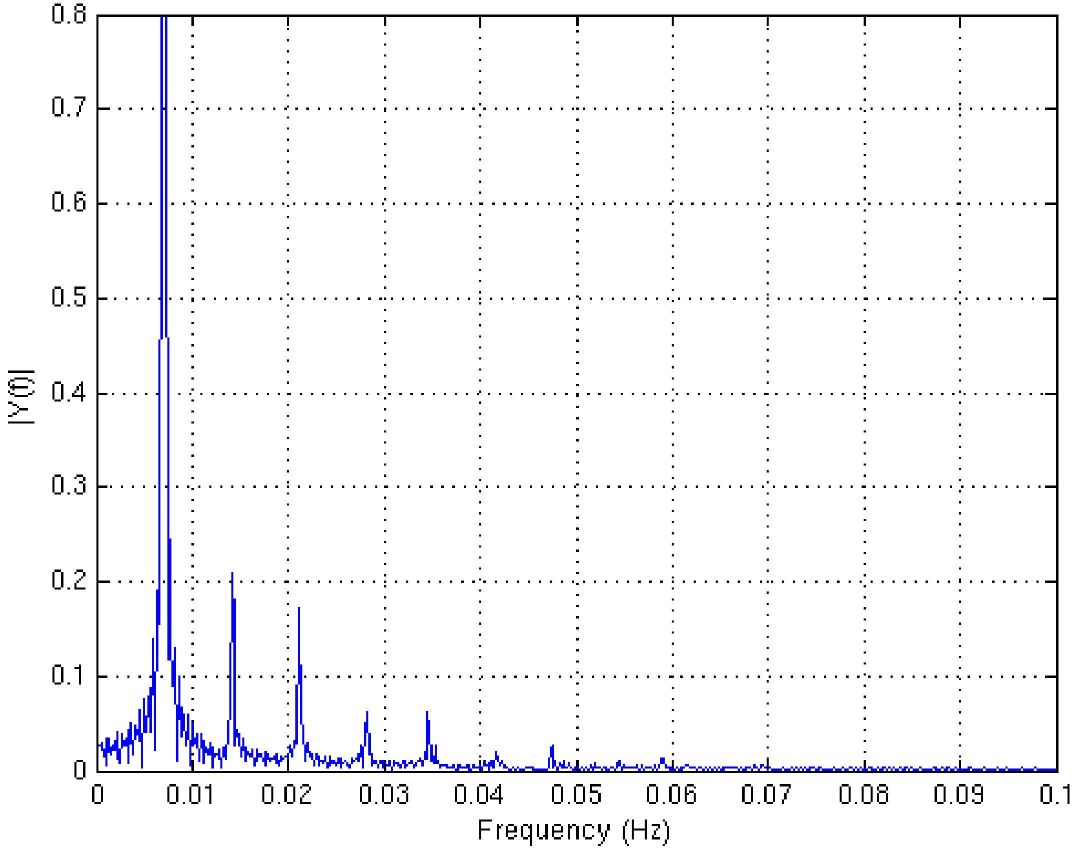
NORMA W CZASIE



AUTOKORELACJA



ANALIZA WIDMOWA



Analiza widmowa c.d.

w_i	0,0071	0,0142	0,0212	0,0281	0,0348	0,0413	0,0476	0,0536	0,0594	0,0648
max	0,0076	0,0141	0,0212	0,0345	0,0347	0,0353	0,0475	0,0589	0,0591	

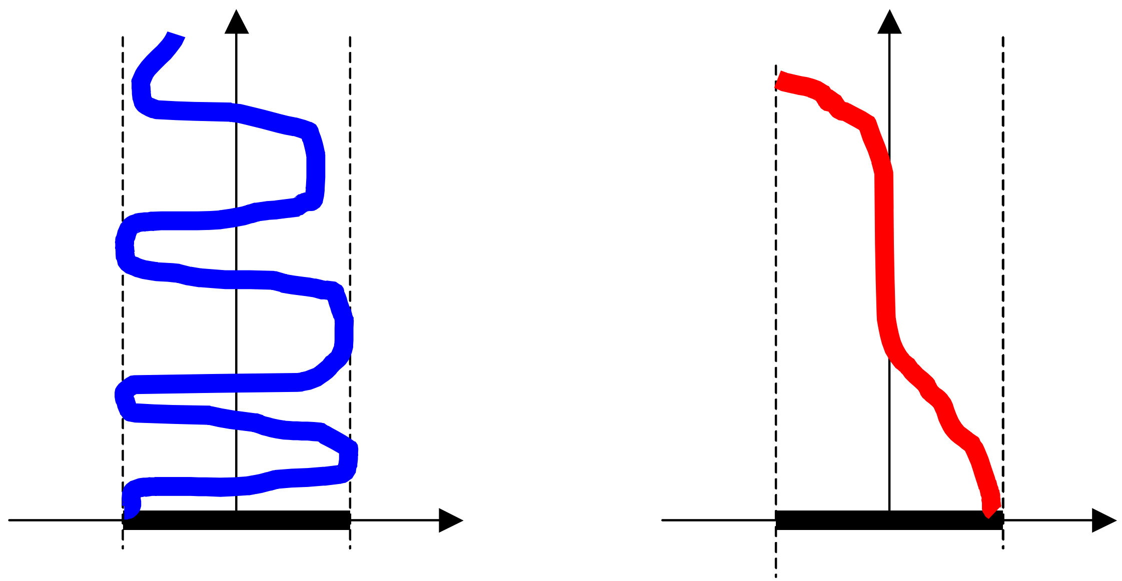
w_i	0,0698	0,0745	0,0787	0,0825	0,0858	0,0887	0,0910	0,0929	0,0942	0,0950	
max	0,0694		0,0784	0,0805	0,0849	0,0885	0,0912			0,0978	0,1015

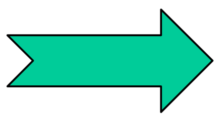
UWAGI KOŃCOWE

- Ograniczone możliwości komputera
- Sterowanie komputerowe

REDUKCJA WYMIARU

Utrata informacji



Redukcja wymiaru: n=2  **n=1**

$$n = +\infty \quad \Rightarrow \quad \dim n < +\infty$$

OGRANICZONE MOŻLIWOŚCI KOMPUTERA

$$x_{i+1} = F(x_i), \;\; F(x) = (x + 2/x)/2$$

$$x > 0 \qquad\qquad x_i \to \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{3} = 0.33333333\ldots = 0.(3) \approx 0.3333$$

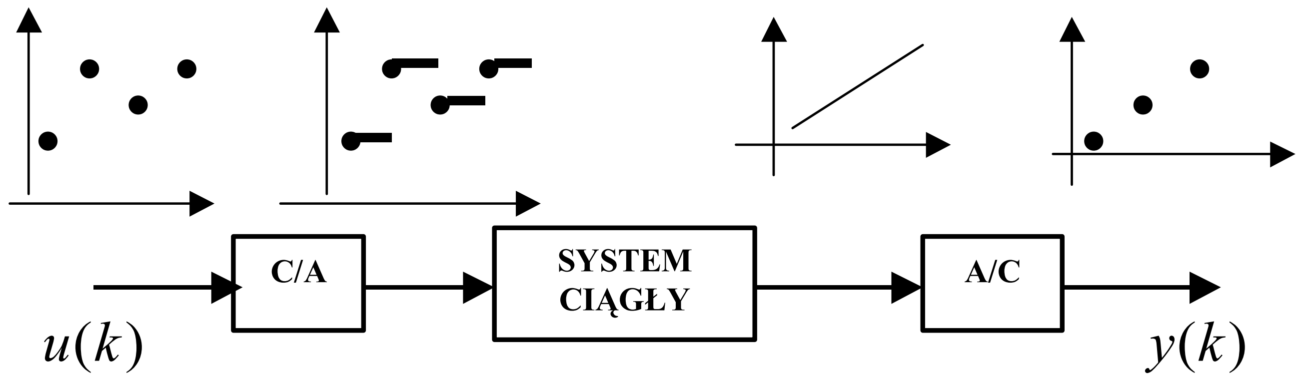
STEROWANIE KOMPUTEROWE

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ x(0) \in R^n \qquad t \in [kh, (k+1)h)$$

$$y(k) = Cx(k),\ \ u(k) \in R^r,\ \ y(k) \in R^m,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots \qquad t = kh, \quad h > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$A := e^{Ah}, \quad B := \int_0^h e^{At} B dt, \quad C := C$$



Wykorzystane prace

- Lasota, Rudnicki (2004)
- Oprocha (2008), Kwietniak (2008)
- Banasiak (2005), Galias, Kudrewicz (1993)
- Mitkowski P.(2009, 2010), Obrączka (2010)
- Dawidowicz, Zgliczyński, Srzednicki
- Inne ...np. Bronsztejn i inni (2004)

DZIĘKUJĘ I PROSZĘ O UWAGI

wojciech.mitkowski@agh.edu.pl