Nieskończenie wymiarowe równanie Lapunowa: teoria i przykłady zastosowań

Zbigniew Emirsajłow

Katedra Sterowania i Pomiarów
Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie
e-mail: *emirsaj@zut.edu.pl*

Zielona Góra, 22 listopada 2010

Spis treści

Równania Lapunowa

Głównym celem referatu jest przedstawienie teorii półgrupy złożonej i pokazanie, że jest ona efektywnym narzędziem analizy nieskończenie wymiarowych różniczkowych oraz algebraicznych równań Lapunowa. Głównym równaniem motywującym założenia, przy których rozwiniemy teorię półgrupy złożonej, jest *różniczkowe równanie Lapunowa* o postaci

$$\dot{M}(t) = AM(t) + M(t)A^* + BB' , \quad t \geq 0 , \quad M(0) = M_0 , \tag{1}$$

w którym $(M(t))_{t\geq 0}$, A, A^* i BB' są liniowymi operatorami działającymi w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta.
Postać *algebraiczna równania Lapunowa* jest stacjonarną wersją równania (1) i wygląda następująco:

$$AM + MA^* + BB' = 0 , \tag{2}$$

gdzie operator M nie zależy od czasu.

Oznaczenia

- H, U sa przestrzeniami Hilberta (które identyfikujemy z ich przestrzeniami dualnymi.
- $\mathcal{H} = \mathscr{L}(H)$ jest przestrzenią Banacha liniowych, ograniczonych operatorów z H do H z normą $\|\cdot\|$. $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ oznacza $\mathscr{L}(H)$ z jednostajna topologią operatorową (indukowaną przez normę $\|\cdot\|$) a $(\mathcal{H}, \tau)$ oznacza $\mathscr{L}(H)$ z silną topologią operatorową τ, tzn., topologią indukowaną przez rodzinę półnorm $\mathcal{P} = \{p_h\}$, gdzie $p_h(X) = \|Xh\|_H$ dla $X \in \mathscr{L}(H)$ i $h \in H$.
- A jest liniowym, nieograniczonym operatorem na H generujacym silnie ciągłą półgrupę $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$. $H_1^A = \mathscr{D}(A)$ jets przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle_1^A = \langle (\lambda I - A)(\cdot), (\lambda I - A)(\cdot) \rangle_H$ i normą $\|\cdot\|_1^A$, gdzie $\lambda \in \rho(A)$ i $\rho(A)$ jest zbiorem rezolwentowym operatora A. AAnalogicznie definiujemy $H_1^{A^*} = \mathscr{D}(A^*)$, gdzie A^* jest nieograniczonym operatorem sprzężonym do A.
- H_{-1}^A jest uzupełnieniem H w normie $\|\cdot\|_{-1}^A = \|(\lambda I - A)^{-1}(\cdot)\|_H$ indukowanej przez iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-1}^A = \langle (\lambda I - A)^{-1}(\cdot), (\lambda I - A)^{-1}(\cdot) \rangle_H$, gdzie $\lambda \in \rho(A)$. Przestrzeń Hilberta H_{-1}^A można równoważnie zdefiniować jako dualną $(H_1^{A^*})'$ do $H_1^{A^*}$. Zachodzi $H_1^A \hookrightarrow H \hookrightarrow H_{-1}^A$ z ciągłymi i gęstymi włożeniami. Analogicznie, wprowadzamy $H_{-1}^{A^*}$.

Oznaczenia - c.d.

- $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ można obciąc do $(T_1(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(H_1^A)$ a jej generator $(A_1, \mathscr{D}(A_1))$ jest częścią A w $H_1^A \subset H$. Ponadto, $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ można rozszerzyć do $(T_{-1}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(H_{-1}^A)$ z generator $(A_{-1}, \mathscr{D}(A_{-1}))$ będącym rozszerzeniem A, gdzie $\mathscr{D}(A_{-1}) = H$. Analogicznie, wprowadzamy $(T_1^*(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(H_1^{A^*})$ z generatorem $(A_1^*, \mathscr{D}(A_1^*))$ i $(T_{-1}^*(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(H_{-1}^{A^*})$ z generatorem $(A_{-1}^*, \mathscr{D}(A_{-1}^*))$, gdzie $\mathscr{D}(A_{-1}^*) = H$.
- $B \in \mathscr{L}(U, H_{-1}^A)$ z operatorem sprzężonym $B' \in \mathscr{L}(H_1^{A^*}, U)$.
- $\mathcal{H}^\sim = \mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_{-1}^A)$ jest przestrzenią Banacha liniowych i ograniczonych operatorów z $H_1^{A^*}$ do H_{-1}^A z normą $\|\cdot\|^\sim$. $(\mathcal{H}^\sim, \|\cdot\|^\sim)$ oznacza $\mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_{-1}^A)$ z jednostajną topologią operatorową (indukowaną przez $\|\cdot\|^\sim$) a $(\mathcal{H}^\sim, \tau^\sim)$ oznacza $\mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_{-1}^A)$ z silna topologią operatorową $\tau^\sim$, tzn., topologią indukowana przez rodzinę półnorm $\mathcal{P}^\sim = \{p_h^\sim\}$, gdzie $p_h^\sim(X) = \|Xh\|_{H_{-1}^A}$ dla $X \in \mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_{-1}^A)$ i $h \in H_1^{A^*}$.

Uwaga

Przestrzeń topologiczna $(\mathcal{H}, \tau)$ jest ciągowo zupełna na zbiorach o ograniczonej normie.

Przykład

Sterowanie optymalne przy kwadratowym wskaźniku jakości - część I.

- Układ sterowania z nieograniczonym operatorem wejściowym
$$\dot{x}(t) = A_{-1}x(t) + Bu(t)\,, \quad t \geq 0\,, \quad x(0) = x_0\,, \tag{3}$$
gdzie $(x(t))_{t\geq 0}$ jest trajektorią stanu, a $(u(t))_{t\geq 0} \subset U$ jest sterowaniem.
- Założenia: czas $t_1 \in (0, \infty)$ jest ustalony, $x_0 \in H$, $z_1 \in H$, B jest dopuszczalnym operatorem wejściowym.
- Zadanie: Znaleźć sterowanie $u_{\mathrm{opt}} \in L^2(0, t_1; U)$, które zminimalizuje kwadratowy wskaźnik jakości
$$J_{t_1}(u) = \|x(t_1) - z_1\|_H^2 + \|u\|^2_{L^2(0,t_1;U)} \tag{4}$$
na całej przestrzeni $L^2(0, t_1; U)$.
- Sterowanie optymalne u_{opt} istnieje i jest jednoznaczne.
- Optymalna para $\{u_{\mathrm{opt}}, x_{\mathrm{opt}}\} \in L^2(0, t_1; U) \times C([0, t_1]; H)$ jest jednoznacznie scharakteryzowana równaniami:

$$\dot{x}_{\mathrm{opt}}(t) = A_{-1}x_{\mathrm{opt}}(t) + Bu_{\mathrm{opt}}(t)\,, \quad t \in [0, t_1]\,, \quad x_{\mathrm{opt}}(0) = x_0\,, \tag{5a}$$
$$\dot{p}(t) = -A^*p(t)\,, \quad t \in [0, t_1]\,, \quad p(t_1) = z_1 - x_{\mathrm{opt}}(t_1)\,, \tag{5b}$$
$$u_{\mathrm{opt}}(t) = B'p(t)\,. \tag{5c}$$

Przykład

- Dla $x_0, z_1 \in H$ i dopuszczalnego $B \in \mathscr{L}(U, H^A_{-1})$ rozwiązania równań (5a) i (5b) są rozumiane w sensie słabym, a wyrażenie (5c) na sterowanie optymalne ma sens tylko jako funkcja z przestrzeni $L^2(0, t_1; U)$.
- Podstawiając (5c) do (5a), otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{-1} & BB' \\ 0 & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \ t \in [0, t_1], \ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_1 - x_1(t_1) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gdzie $x_{\mathrm{opt}} = x_1$ i $u_{\mathrm{opt}} = B'x_2$.

Uwaga

Jest to typowe zagadnienie dwugraniczne, którego rozwiązanie $[x_1(t)\ x_2(t)]^T$, $t \in [0, t_1]$ jest trudne do wyznaczenia. Wynika to z faktu, że warunek końcowy $x_2(t_1)$ zależy od warunku końcowego $x_1(t_1)$ i wobec tego oba równania różniczkowe są ze sobą sprzęgnięte, a ponadto operator BB' występujący w pierwszym równaniu jest „silnie" nieograniczony względem przestrzeni stanu H (spełnia on warunek $BB' \in \mathcal{H}^{\sim} = \mathscr{L}(H_1^{A^*}, H^A_{-1})$).

Przykład

- Równania (6) zastępujemy zagadnieniem dwugranicznym:

$$\left[\begin{array}{c} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} A_{-1} & BB' \\ 0 & -A^* \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right], \quad t \in [0, t_1], \quad \left[\begin{array}{c} x_1(0) \\ x_2(t_1) \end{array}\right] \in H \times H_2^{A^*}, \tag{7}$$

  gdzie *nie zakładamy* a priori dopuszczalności operatora B, a $H_2^{A^*}$ jest dziedziną A_1^* rozumianego jako nieograniczony operator na przestrzeni $H_1^{A^*}$.
- Warunki początkowo-końcowe problemu (7) różnią się od warunków z problemu (6), ponieważ nie zakładamy teraz zależności stanu $x_2(t_1)$ od stanu $x_1(t_1)$.
- Dla $x_2(t_1) \in H_2^{A^*}$, otrzymujemy

$$x_2(\cdot) \in C([0, t_1]; H_2^{A^*}) \cap C^1([0, t_1]; H_1^{A^*}),$$

  a różniczkowalność funkcji $x_2(\cdot)$ oraz założenie $x_1(0) \in H$ gwarantują, że

$$x_1(\cdot) \in C([0, t_1]; H) \cap C^1([0, t_1]; H_{-1}^A).$$

- Równania różniczkowe (7) są spełnione w przestrzeni $H_{-1}^A \times H_1^{A^*}$ dla każdego $t \in [0, t_1]$.

Przykład

- Wprowadzamy nowe zmienne stanu $[w_1(t)\ w_2(t)]^T$

$$\begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -M(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_1] \tag{8}$$

  spełniające równania

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{-1} & 0 \\ 0 & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_1], \quad \begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

  gdzie $(M(t))_{t\in[0,t_1]}$ jest nieznaną rodzina operatorów.
- Aby określić ogólne warunki, które powinna spełniać ta rodzina, formalnie zróżniczkujmy (8)

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -\dot{M}(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -M(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Przykład

Powyższe wyrażenia mają sens, jeżeli:

- Operator $M(t)$ będzie ograniczony na przestrzeni stanu H, tzn.

$$(M(t))_{t\in[0,t_1]} \subset \mathcal{H}\,, \tag{11}$$

  i ciągły w czasie w silnej topologii operatorowej τ przestrzeni $\mathcal{H}$, tzn. $M(\cdot) \in C([0,t_1];(\mathcal{H},\tau))$. Ponadto

$$M(0) = 0\,, \tag{12}$$

  co wynika z warunków początkowo-końcowych problemu (9).

- Pochodna $\dot{M}(t)$ będzie dobrze zdefiniowana w przestrzeni $\mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_{-1}^A)$, tzn.

$$(\dot{M}(t))_{t\in[0,t_1]} \subset \mathcal{H}^{\sim}\,, \tag{13}$$

  i ciągła w czasie w silnej topologii operatorowej $\tau^{\sim}$ przestrzeni $\mathcal{H}^{\sim}$, tzn. $\dot{M}(\cdot) \in C([0,t_1];(\mathcal{H}^{\sim},\tau^{\sim}))$.

Powyższe własności rodziny $(M(t))_{t\in[0,t_1]}$ gwarantują, że układ (10) jest dobrze zdefiniowany w $H_{-1}^A \times H_1^{A^*}$ dla każdego $t \in [0,t_1]$.

Przykład

- Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{-1} & -\dot{M}(t) + A_{-1}M(t) + M(t)A^* + BB' \\ 0 & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

który ma sens w przestrzeni $H^A_{-1} \times H^{A^*}_1$ dla każdego $t \in [0, t_1]$.

- Diagonalizacja (9) wymaga istnienia rozwiązania $M(\cdot) \in C([0, t_1]; (\mathcal{H}, \tau)) \cap C^1([0, t_1]; (\mathcal{H}^\sim, \tau^\sim))$ równania:

$$\dot{M}(t) = A_{-1}M(t) + M(t)A^* + BB', \quad t \in [0, t_1], \quad M(0) = 0, \tag{15}$$

gdzie równość rozumiana jest w przestrzeni $\mathcal{H}^\sim$.

Wniosek

Interesuje nas rozwiązanie *niejednorodnego różniczkowego równaniem Lapunowa z nieograniczonym elementem wejściowym*:

$$\dot{M}(t)h = A_{-1}M(t)h + M(t)A^*h + BB'h, \quad t \geq 0, \quad M(0) = M_0, \quad h \in H^{A^*}_1, \tag{16}$$

gdzie równość rozumiana jest w H^A_{-1}, przy założeniach $M_0 \in \mathcal{H}$ oraz $BB' \in \mathcal{H}^\sim$.

Własności półgrupy złożonej

Wykorzystując półgrupy $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ i $(T^*(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ generowane przez A i A^*, odpowiednio, definiujemy jeszcze jedną półgrupę.

Definicja

Rodzinę operatorów $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$, zdefiniowaną zależnością

$$\mathcal{U}(t)X = T(t)XT^*(t), \quad X \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0\,, \tag{17}$$

nazywamy *półgrupą złożoną*.

Z definicji wynikają następujące własności rodziny $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$:

(a) Rodzina operatorów $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$ jest półgrupą, tzn.,

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(0)X &= X\,, \quad X \in \mathcal{H}\,, \\ \mathcal{U}(t+s)X &= \mathcal{U}(t)(\mathcal{U}(s)X) = \mathcal{U}(s)(\mathcal{U}(t)X)\,, \quad X \in \mathcal{H}, \quad t, s \geq 0\,. \end{aligned}$$

(b) $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$ jest silnie τ-ciągła dla każdego $t \geq 0$, tzn. dla każdego $X \in \mathcal{H}$

$$\tau\text{-}\lim_{\Delta\to 0} \big(\mathcal{U}(t+\Delta)X - X\big) = \lim_{\Delta\to 0} \|(\mathcal{U}(t+\Delta)X)h - (\mathcal{U}(t)X)h\|_H = 0\,, \quad h \in H\,. \tag{18}$$

Własności półgrupy złożonej

Definicja

Generatorem $\mathcal{A}$ półgrupy złożonej $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$ nazywamy granicę

$$\mathcal{A}X = \tau\text{-}\lim_{t\searrow 0} \frac{\mathcal{U}(t)X - X}{t}, \quad X \in \mathscr{D}(\mathcal{A}), \tag{19}$$

gdzie $\mathscr{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ jest *dziedziną* operatora $\mathcal{A}$ zdefiniowaną następująco

$$\mathscr{D}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathcal{H} : \ \tau\text{-}\lim_{t\searrow 0} \frac{\mathcal{U}(t)X - X}{t} \ \text{isnieje w } (\mathcal{H}, \tau)\}. \tag{20}$$

(c) $X \in \mathcal{H}$ należy do dziedziny $\mathscr{D}(\mathcal{A})$ wtedy i tylko wtedy, gdy obcięcie X do $H_1^{A^*}$ należy do $\mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_1^A)$, tzn.,

$$\mathscr{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \cap \mathscr{L}(H_1^{A^*}, H_1^A), \tag{21}$$

i rozszerzenie operatora $(AX + XA^*) \in \mathscr{L}(H_1^{A^*}, H)$ do H należy do $\mathcal{H}$.

(d) Operator $\mathcal{A}$ posiada następującą jawną reprezentacją

$$(\mathcal{A}X)h = AXh + XA^*h, \quad X \in \mathscr{D}(\mathcal{A}), \quad h \in H_1^{A^*}. \tag{22}$$

Własności półgrupy złożonej

(e) Dla $X \in \mathcal{H}$ mamy

$$\int_0^t \mathcal{U}(r)X\, dr \in \mathscr{D}(\mathcal{A}), \quad t \geq 0, \tag{23}$$

gdzie całka ma sens w $(\mathcal{H}, \tau)$. Jeżeli $X, Y \in \mathcal{H}$, to

$$\mathcal{U}(t)X - X = \int_0^t \mathcal{U}(r)Y\, dr, \quad t \geq 0, \tag{24}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $X \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$ i $Y = \mathcal{A}X$.

(f) Jeżeli $X \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$, to $(\mathcal{U}(t)X)_{t\geq 0} \subset \mathscr{D}(\mathcal{A})$ i jest τ-różniczkowalne względem t, tzn. $\mathcal{U}(\cdot)X \in C^1([0,\infty); (\mathcal{H}, \tau))$, oraz

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}(t)X = \mathcal{A}(\mathcal{U}(t)X) = \mathcal{U}(t)(\mathcal{A}X), \quad t \geq 0. \tag{25}$$

(g) Spełnione są równości

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathcal{H})} = \|T(t)\|_{\mathcal{H}} \|T^*(t)\|_{\mathcal{H}} = \|T(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \quad t \geq 0, \tag{26}$$

i jeżeli $\omega_0(T)$ jest wskaźnikiem wzrostu $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$, a $\omega_0(\mathcal{U})$ jest wskaźnikiem wzrostu $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$, to

$$\omega_0(\mathcal{U}) = 2\omega_0(T). \tag{27}$$

Własności półgrupy złożonej

Dla $\lambda \in \mathbb{C}_{2\omega_0(T)} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2\omega_0(T)\}$ definiujemy rodzinę operatorów $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathscr{L}(\mathcal{H})$ wykorzystując przekształcenie Laplace'a

$$\mathcal{R}(\lambda)X = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathcal{U}(t)X\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,T(t)XT^*(t)\,dt\,, \quad X \in \mathcal{H}\,, \tag{28}$$

gdzie całki są zbieżne w $(\mathcal{H}, \tau)$.

(h) Zachodzi

$$\mathbb{C}_{2\omega_0(T)} \subset \rho(\mathcal{A})\,, \tag{29}$$

gdzie $\rho(\mathcal{A})$ jest zbiorem rezolwentowym operatora $\mathcal{A}$.

(i) Jeżeli $\lambda \in \mathbb{C}_{2\omega_0(T)}$, to operator $\mathcal{R}(\lambda)$ pokrywa się z rezolwentą $\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})$ operatora $\mathcal{A}$, tzn.

$$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} \in \mathscr{L}(\mathcal{H}) \tag{30}$$

oraz

$$\mathscr{R}(\mathcal{R}(\lambda)) = \mathscr{R}(\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})) = \mathscr{D}(\mathcal{A})\,. \tag{31}$$

Własności półgrupy złożonej

Wniosek

Bezpośrednio z własności (f) wynika, że dla każdego $X_0 \in \mathscr{D}(\mathcal{A})$ wyrażenie

$$X(t) = \mathcal{U}(t)X_0 = T(t)X_0T^*(t)\,, \quad t \geq 0\,,$$

spełnia warunek $(X(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{D}(\mathcal{A})$ oraz $X(\cdot) \in C^1([0,\infty);(\mathcal{H},\tau))$, i w rzeczywistości jest τ-różniczkowalnym rozwiązaniem jednorodnego zagadnienia Cauchyego

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}X(t) \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0\,, \quad X(0) = X_0\,. \tag{32}$$

Na mocy własności (d) równanie (32) można przepisać w postaci

$$\dot{X}(t)h = AX(t)h + X(t)A^*h\,, \quad h \in H_1^{A^*}\,, \quad t \geq 0\,, \quad X(0) = X_0\,, \tag{33}$$

które jest jednorodnym równaniem różniczkowym Lapunowa.

Uwaga

Przede wszystkim interesuje nas jednak niejednorodne równanie Lapunowa z *nieograniczonym* wejściem F spełniajacym warunek

Rozszerzenie półgrupy złożonej

- Na $\mathcal{H}$ definiujemy dodatkową normę $\|X\|_\star := \|\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})X\|$, gdzie $X \in \mathcal{H}$, oraz rodzinę półnorm $\mathcal{P}_\star = \{p_{\star\, h}\}$, gdzie $p_{\star\, h}(X) = p_h(\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})X) = \|(\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A})X)h\|_H$ dla $X \in \mathcal{H}$ i $h \in H$. $\tau_\star$ oznacza topologię na $\mathcal{H}$ indukowaną przez rodzinę $\mathcal{P}_\star$.
- $\mathcal{H}_{-1}$ jest przestrzenią Banacha zdefiniowaną jako uzupełnienie $\mathcal{H}$ rozumiane w sensie klas równoważności ciągów Cauchy'ego w $(\mathcal{H}, \tau_\star)$ o ograniczonej normie $\|\cdot\|_\star$. Norma w $\mathcal{H}_{-1}$ zdefiniowana jest zależnością

$$\|X\|_{-1} = \sup_{p_{-1\, h} \in \mathcal{P}_{-1}} p_{-1\, h}(X)\,, \quad X \in \mathcal{H}_{-1}\,,$$

gdzie $\mathcal{P}_{-1} = \{p_{-1\, h}\}$ jest rodziną półnorm $p_{-1\, h}$ na $\mathcal{H}_{-1}$, zdefiniowanych granicą

$$p_{-1\, h}(X) = \lim_{n \to \infty} p_{\star\, h}(X_n)\,, \quad h \in H\,,$$

gdzie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ jest dowolnym reprezentantem klasy równoważności X. Jeżeli τ_{-1} oznacza topologię na $\mathcal{H}_{-1}$ indukowaną przez rodzinę $\mathcal{P}_{-1}$, wówczas kanoniczna injekcja $(\mathcal{H}, \tau) \hookrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \tau_{-1})$ jest bi-ciągła i bi-gęsta.

Rozszerzenie półgrupy złożonej

- $(\mathcal{U}_{-1}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H}_{-1})$ jest τ_{-1}-ciągłą półgrupą zdefiniowaną zależnością
$$\mathcal{U}_{-1}(t)X := \tau_{-1}\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathcal{U}(t)X_n = \tau_{-1}\text{-}\lim_{n\to\infty} T(t)X_n T^*(t)\,, \quad t\geq 0\,, \quad X\in\mathcal{H}_{-1}\,,$$
gdzie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ jest ciągiem ograniczonym w $\|\cdot\|_{-1}$ i τ_{-1}-zbieżnym do X.
- Generator $(\mathcal{A}_{-1}, \mathscr{D}(\mathcal{A}_{-1}))$ posiada dziedzinę $\mathscr{D}(\mathcal{A}_{-1}) = \mathcal{H}$ i spełnia warunek $\mathcal{A}_{-1}X = \mathcal{A}X$ dla $X\in\mathscr{D}(\mathcal{A})$. Ponadto, $\omega_0(\mathcal{U}_{-1}) = \omega_0(\mathcal{U}) = 2\omega_0(T)$.
- Niejednorodny problem Cauchy'ego
$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}_{-1}X(t) + F\,, \quad t\geq 0\,, \quad X(0) = X_0\,, \tag{34}$$
gdzie $X_0\in\mathcal{H}$ i $F\in\mathcal{H}_{-1}$.

Lemat

Jeżeli $F\in\mathcal{H}_{-1}$ i $X_0\in\mathcal{H}$, to (34) *ma jednoznaczne rozwiązanie spełniajace warunek*
$$X(\cdot)\in C([0,\infty);(\mathcal{H},\tau))\cap C^1([0,\infty);(\mathcal{H}_{-1},\tau_{-1}))\,. \tag{35}$$
Rozwiązanie to dane jest zależnością
$$X(t) = \mathcal{U}(t)X_0 + \int_0^t \mathcal{U}_{-1}(t-r)F\,dr\,. \tag{36}$$

Reprezentacja $\mathcal{A}_{-1}$ i $\mathcal{U}_{-1}(t)$

- $(\mathcal{U}^{\sim}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H}^{\sim})$ jest półgrupą złożoną zdefiniowaną

$$\mathcal{U}^{\sim}(t)X := T_{-1}(t)ZT_1^*(t)\,, \quad X \in \tilde{\mathcal{H}}\,, \quad t \geq 0\,. \tag{37}$$

$(\mathcal{A}^{\sim}, \mathscr{D}(\mathcal{A}^{\sim}))$ oznacza jej generator. Zachodzi $\mathcal{H} \subset \mathscr{D}(\mathcal{A}^{\sim})$ i $\omega_0(\mathcal{U}^{\sim}) = \omega_0(\mathcal{U})$.

Lemat

(a) $(\mathcal{H}, \tau) \hookrightarrow (\mathcal{H}_{-1}, \tau_{-1}) \hookrightarrow (\mathcal{H}^{\sim}, \tau^{\sim})$ *i injekcje są bi-ciągłe i bi-gęste.*

(b) *Prawdziwe są następujace zależności (równości w H^A_{-1}):*

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{-1}X)h &= (\mathcal{A}^{\sim}X)h \\
&= A_{-1}Xh + XA^*h\,, \quad X \in \mathcal{H}\,, \quad h \in H_1^{A^*}\,, && (38)\\
(\mathcal{U}_{-1}(t)X)h &= (\mathcal{U}^{\sim}(t)X)h \\
&= T_{-1}(t)XT_1^*(t)h\,, \quad X \in \mathcal{H}_{-1}\,, \quad t \geq 0\,, \quad h \in H_1^{A^*}\,, && (39)\\
(\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}_{-1})X)h &= (\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}^{\sim})X)h \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T_{-1}(t)XT_1^*(t)hdt\,, \quad X \in \mathcal{H}_{-1}\,, \quad h \in H_1^{A^*}\,. && (40)
\end{aligned}$$

Algebraiczne równanie Lapunowa

Lemat

Niech $\lambda \in \mathbb{C}_{2\omega_0(T)}$ *i* $F \in \mathcal{H}^{\sim}$*. Algebraiczne równanie Lapunowa (w* H^{A}_{-1}*)*

$$\lambda X h - A_{-1} X h - X A^* h = F h \,, \quad h \in H_1^{A^*} \tag{41}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $X \in \mathcal{H} = \mathscr{L}(H)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$F \in \mathcal{H}_{-1} \tag{42}$$

równoważnie,

$$\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}^{\sim}) F \in \mathcal{H} \,. \tag{43}$$

Uwaga

Z równoważności H^{A}_{-1} i $(H_1^{A^*})'$ wynika, że (41) można przepisać w postaci

$$\lambda \langle Xh, g\rangle_H - \langle Xh, A^* g\rangle_H - \langle XA^* h, g\rangle_H = \langle Fh, g\rangle_{(H_1^{A^*})' \times H_1^{A^*}} \,, \quad h, g \in H_1^{A^*} \,, \tag{44}$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(H_1^{A^*})' \times H_1^{A^*}}$ oznacza relację dualności między $H_1^{A^*}$ i $(H_1^{A^*})'$.

Różniczkowe równanie Lapunowa

- Niejednorodny problem Cauchy'ego

$$\dot{X}(t) = \mathcal{A}^{\sim}X(t) + F\,, \quad t \geq 0\,, \quad X(0) = X_0\,, \tag{45}$$

gdzie $X_0 \in \mathcal{H}$ i $F \in \mathcal{H}^{\sim}$, lub rownoważnie

$$\dot{X}(t)h = A_{-1}X(t)h + X(t)A^*h + Fh\,, \quad h \in H_1^{A^*}\,, \quad t \geq 0\,, \quad X(0) = X_0\,, \tag{46}$$

gdzie $X_0 \in \mathcal{H}$, $F \in \mathcal{H}^{\sim}$ i równość (46) zachodzi w H^A_{-1}.
- Częściowy wynik (wynika z lematu dla problemu Cauchy'ego (34)).

Wniosek

Jeżeli $F \in \mathcal{H}_{-1}$ i $X_0 \in \mathcal{H}$, to różniczkowe równanie Lapunowa (46) posiada jednoznaczne rozwiązanie $X(\cdot) \in C([0,\infty);(\mathcal{H},\tau)) \cap C^1([0,\infty);(\mathcal{H}_{-1},\tau_{-1}))$, dane zależnością

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathcal{U}(t)X_0 + \int_0^t \mathcal{U}^{\sim}(t-r)F\,dr \\ &= T(t)X_0T^*(t) + \int_0^t T_{-1}(t-r)FT_1^*(t-r)\,dr\,, \quad t \geq 0\,. \end{aligned} \tag{47}$$

Dopuszczalny element wejściowy

- Wprowadzamy rodzinę operatorów $((\mathcal{M}F)(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}^{\sim}$

$$(\mathcal{M}F)(t) = \int_0^t \mathcal{U}^{\sim}(t-r)Fdr = \int_0^t T_{-1}(t-r)FT_1^*(t-r)dr\,, \quad F \in \mathcal{H}^{\sim}\,, \quad t \geq 0\,. \tag{48}$$

Definicja

$F \in \mathcal{H}^{\sim}$ nazywamy dopuszczalnym elementem wejściowym dla różniczkowego równania Lapunowa (46) jeżeli istnieją $\varepsilon > 0$ i $C > 0$ takie, że

$$(\mathcal{M}F)(t) \in \mathcal{H}\,, \quad t \in [0,\varepsilon]\,, \tag{49}$$

$$\sup_{0\leq t\leq\varepsilon} \|(\mathcal{M}F)(t)\| \leq C\,, \tag{50}$$

oraz

$$\tau\text{-}\lim_{t\searrow 0}(\mathcal{M}F)(t) = 0\,. \tag{51}$$

Dopuszczalny element wejściowy

Lemat

Jeżeli $F \in \mathcal{H}^{\sim}$ jest dopuszczalnym elementem wejściowym dla różniczkowego równania Lapunowa (46)*, to spełniony jest warunek*

$$(\mathcal{M}F)(t) \in \mathcal{H}\,, \quad t \geq 0\,, \tag{52}$$

oraz

$$(\mathcal{M}F)(\cdot) \in C([0,\infty);(\mathcal{H},\tau))\,. \tag{53}$$

Twierdzenie

$F \in \mathcal{H}^{\sim}$ jest dopuszczalnym elementem wejściowym dla różniczkowego równania Lapunowa (46) *wtedy i tylko wtedy, gdy $F \in \mathcal{H}_{-1}$.*

Uwaga

Wszystkie elementy $F \in \mathcal{H}_{-1}$ można sparametryzować zależnością

$$F(X) = \lambda X - A_{-1}X - XA^*\,, \quad X \in \mathcal{H}.$$

Różniczkowe równanie Lapunowa

Wniosek

Różniczkowe równanie Lapunowa

$$\dot{M}(t) = A_{-1}M(t) + M(t)A^* + BB' \,, \quad t \geq 0 \,, \quad M(0) = 0 \,, \tag{54}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $(M(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ spełniające warunek

$$M(\cdot) \in C([0,\infty);(\mathcal{H},\tau)) \cap C^1([0,\infty);(\mathcal{H}_{-1},\tau_{-1}))$$

(stąd także w $M(\cdot) \in C^1([0,\infty);(\mathcal{H}^{\sim},\tau^{\sim}))$) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$BB' \in \mathcal{H}_{-1} \,, \tag{55}$$

równoważnie,

$$\mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}^{\sim})(BB') \in \mathcal{H} \,. \tag{56}$$

Rozwiązanie to dane jest zależnością

$$M(t) = \int_0^t \mathcal{U}_{-1}(t-r)(BB')\,dr = \int_0^t T_{-1}(t-r)BB'T_1^*(t-r)\,dr \,, \quad t \geq 0 \,. \tag{57}$$

Dopuszczalność operatora BB'

Uwaga

(a) Warunek (55) jest równoważny faktowi, że dla $\lambda \in \mathbb{C}_{2\omega_0(T)}$ algebraiczne równanie Lapunowa

$$\lambda\langle Xh, g\rangle_H - \langle Xh, A^*g\rangle_H - \langle XA^*h, g\rangle_H = \langle B'h, B'g\rangle_U\,, \quad h, g \in H_1^{A^*}\,, \tag{58}$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie $X \in \mathcal{H}$.

(b) Jeżeli $X \in \mathcal{H}$ spełnia równanie (58), to również spełnia je $X^* \in \mathcal{H}$. Jednoznaczność implikuje więc samosprzężonośc rozwiązania. Ponieważ X można przedstawić w postaci

$$X = \mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}^{\sim})(BB') = \mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}_{-1})(BB')\,, \tag{59}$$

więc wynika stąd, że operator X jest nieujemny.

Lemat

Niech $B \in \mathscr{L}(U, H_{-1}^A)$ ($BB' \in \mathcal{H}^{\sim}$). $BB' \in \mathcal{H}_{-1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $B \in \mathscr{L}(U, H_{-1}^A)$ jest dopuszczalnym operatorem wejściowym dla $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$.

Przykład 1 - c.d.

Sterowanie optymalne przy kwadratowym wskaźniku jakości - część II.

- Końcowy układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_1(t) \\ \dot{w}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{-1} & 0 \\ 0 & -A^*_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_1] \tag{60}$$

(w przestrzeni $H^A_{-1} \times H^{A^*}_{-1}$) z warunkami początkowo-końcowymi:

$$\begin{bmatrix} w_1(0) \\ w_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_1 - (I + M(t_1))^{-1}(w_1(t_1) + M(t_1)z_1) \end{bmatrix}, \tag{61}$$

gdzie $x_0 \in H$ i $z_1 \in H$.

Uwaga

Aby wyznaczyć $(w_1(t))_{t\in[0,t_1]}$, musimy najpierw rozwiązać pierwsze równanie różniczkowe z układu (60) do przodu w czasie i wówczas otrzymamy również $w_1(t_1)$. Mając $M(t_1)$ i $w_2(t_1)$, musimy następnie rozwiązać drugie równanie różniczkowe z układu (60) do tyłu w czasie i wówczas otrzymamy funkcję $(w_2(t))_{t\in[0,t_1]}$.

Przykład 1 - c.d.

Uwaga

Słabe rozwiązanie wyjściowego zagadnienia dwugranicznego

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{-1} & BB' \\ 0 & -A^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_1], \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ z_1 - x_1(t_1) \end{bmatrix}, \tag{62}$$

gdzie $x_0, z_1 \in H$, otrzymujemy z zależności

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & M(t) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, t_1] \, . \tag{63}$$

Z zależności tej wynika, że dla każdej pary $x_0, z_1 \in H$ zagadnienie dwugraniczne (62) ma jednoznaczne słabe rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} x_1(\cdot) \\ x_2(\cdot) \end{bmatrix} \in C([0, t_1]; H) \times C([0, t_1]; H) \, , \tag{64}$$

które w sposób ciągły zależy od danych x_0 i z_1.

Dopuszczalność przy nieskończonym horyzoncie czasowym

Definicja

Operator $B \in \mathscr{L}(U, H_{-1}^A)$ nazywany jest *dopuszczalnym operatorem wejściowym przy nieskończonym horyzoncie czasowym* (dla półgrupy $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(H)$), jeżeli istnieje stała $C_\infty > 0$ taka, że zachodzi warunek

$$\| \int_0^\infty T_{-1}(t)Bu(t)\,\mathrm{d}t\|_H \leq C_\infty \|u\|_{L^2(0,\infty;U)}, \quad u \in L^2(0,\infty;U)\,, \tag{65}$$

lub równoważnie

$$\Big(\int_0^\infty \|B' T_1^*(t)h\|_U^2\,\mathrm{d}t\Big)^{1/2} \leq C_\infty \|h\|_H, \quad h \in \mathscr{D}(A^*). \tag{66}$$

Algebraiczne równanie Lapunowa

Lemat

$B \in \mathscr{L}(U, H^A_{-1})$ jest dopuszczalnym operatorem wejściowym przy nieskończonym horyzoncie czasowym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje samosprzężony i nieujemny operator $M \in \mathcal{H}$ spełniający równanie

$$-\mathcal{A}^{\sim} M = BB' \tag{67}$$

w przestrzeni $\mathcal{H}^{\sim}$, lub równoważnie, algebraiczne równanie Lapunowa

$$-A_{-1}Mh - MA^{*}h = BB'h\,, \quad h \in H_1^{A^*} \tag{68}$$

w przestrzeni H^A_{-1}. Jeżeli dodatkowo półgrupa $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ jest wykładniczo stabilna ($\omega_0(T) < 0$), to rozwiązanie $M \in \mathcal{H}$ jest jednoznaczne i można je przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} M = (-\mathcal{A}^{\sim})^{-1}(BB') = (-\mathcal{A}_{-1})^{-1}(BB') &= \int_0^{\infty} \mathcal{U}_{-1}(t)(BB')\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} T_{-1}(t)BB'T_1^{*}(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{69}$$

Twierdzenie Lapunowa

Lemat

Następujące warunki są równoważne:

(a) $\omega_0(T) < 0$, *tzn. półgrupa* $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{H}$ *jest wykładniczo stabilna.*

(b) $\omega_0(\mathcal{U}) < 0$, *tzn.* $(\mathcal{U}(t))_{t\geq 0} \subset \mathscr{L}(\mathcal{H})$ *jest wykładniczo stabilna.*

(c) *Istnieje samosprzężony i nieujemny operator* $M \in \mathcal{H} \cap \mathscr{D}(\mathcal{A})$ *spełniający równanie*

$$\mathcal{A}M = -I_{\mathcal{H}} \,, \tag{70}$$

gdzie równość zachodzi w $\mathcal{H}$, *a* $I_{\mathcal{H}}$ *jest operatorem tożsamościowym w* $\mathcal{H}$, *lub równoważnie, równanie*

$$\langle Mh, A^*g\rangle_H + \langle MA^*h, g\rangle_H = -\langle h, g\rangle_H \,, \quad h, g \in H_1^{A^*} \,. \tag{71}$$